Matematica - 8 gennaio 2016 *versione* 1

Scrivere nome, cognome e numero di matricola. Non e' consentito usare libri, appunti, calcolatrici, ... Riportare un insieme di passaggi sufficiente per motivare le affermazioni via via fatte. Tempo: 2h.

1. (6 p) Si determinino, se esistono, i seguenti limiti

$$\frac{3^x + x^2}{2^x + x^3}, \quad \text{per } x \to +\infty,\ -\infty; \qquad \frac{x^2-1}{(x-1)^2}, \quad \text{per } x \to 1$$

$$x(e^{\frac{1}{x}} - 1), \quad \text{per } x \to +\infty; \qquad e^x \sin x, \quad \text{per } x \to +\infty,\ -\infty$$

2. (6 p) E' data la funzione $f(x) = \frac{x}{\log x}$. Si determinino: il dominio naturale di f; i limiti di $f(x)$ per x che tende ai punti in $\mathbb{R}^*$ non appartenenti a tale dominio (per i quali abbia senso il limite); gli intervalli in cui f e' crescente/decrescente; gli eventuali punti di massimo e minimo locali per f; gli intervalli in cui f e' curva verso l'alto/il basso; gli eventuali punti di flesso per f; Si dia una rappresentazione del grafico di f coerente con i risultati trovati.

3. (5 p) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{dx}, \qquad \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,\mathrm{dx}, \qquad \int \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{dx}.$$

4. (4 p) E' dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ tx + 2y + tz = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

nelle incognite x, y, z; usando il teorema e la regola di Cramer si determinino le condizioni sul parametro t sotto le quali il sistema e' determinato, e sotto tali condizioni si risolva il sistema.

5. (4 p) Sono date la matrice ed il vettore

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini se possibile l'inversa di A e si risolvano le equazioni nell'incognita $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^T A = \mathbf{b}^T.$$

6. (5 p) Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si stabilisca se e' una base di $\mathbb{R}^3$

$A = \{(1,1,3), (0,1,5)\}$,
$B = \{(1,1,3), (0,1,5), (2,1,1)\}$, $\quad C = \{(1,1,3), (0,1,5), (0,1,7)\}$,
$D = \{(1,1,3), (0,1,5), (0,1,7), (3,5,7)\}$.