

**Matematica - 25 gennaio 2016 versione 1**

Scrivere nome, cognome e numero di matricola. Non e' consentito usare libri, appunti, calcolatrici, ... Riportare un insieme di passaggi sufficiente per motivare le affermazioni via via fatte. Tempo: 2h.

1. (5 p) Si determinino, se esistono, i seguenti limiti

$$\frac{x^{\frac{3}{2}} - x}{x^{\frac{4}{3}} - x}, \quad \text{per } x \rightarrow +\infty; \quad \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}, \quad \text{per } x \rightarrow -1$$
$$\frac{\log(3+x)}{2+x}, \quad \text{per } x \rightarrow -2; \quad x(\sin x + 2), \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

2. (6 p) E' data la funzione

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \log x - \frac{x^2}{4} + 2x, \quad x \in ]0, +\infty[$$

Si determinino gli intervalli in cui  $f$  e' crescente/decescente, gli eventuali punti di massimo e minimo locali per  $f$ , e si verifichino il risultati trovati usando il criterio del II ordine. Si usino le informazioni trovate per determinare il numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = 2$ .

3. (5 p) Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_1^2 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x+1} dx, \quad \int x^2 \sin x dx.$$

4. (4 p) Si risolva il seguente sistema lineare omogeneo nelle incognite  $a, b, c, d$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 5d = 0 \\ 2a + 3b + 5c + 7d = 0 \end{cases}$$

e si dia una verifica della risoluzione.

5. (5 p) Si determini il rango della seguente matrice al variare del parametro  $t \in \mathbb{R}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+t & -t \\ 0 & -t & t^2 \end{bmatrix}.$$

6. (5 p) E' data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si determini se possibile una base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$  costituita da autovettori di  $A$ ; indicata con  $P$  la matrice avente per colonne i vettori di una tale base, ed indicata con  $D$  la matrice diagonale avente per elementi diagonali i rispettivi autovalori, si verifichi che  $A = PDP^T$ .