

1 Numeri reali.

1.1 Linguaggio degli insiemi

Ricordiamo di seguito in modo informale le prime notazioni e nozioni sugli insiemi. Il discorso sugli insiemi si sviluppa a partire dai termini "elemento", "insieme", e da locuzioni come "il tal elemento appartiene (o non appartiene) al tal insieme". Si usano anche variazioni di questa locuzione, come "il tal elemento e' (o non e') del tal insieme" oppure "il tal elemento sta (o non sta) nel tal insieme", ... Di solito, indicheremo gli elementi con lettere minuscole e gli insiemi con lettere maiuscole; per indicare che un elemento a appartiene ad un insieme A scriveremo $a \in A$, per indicare che a non appartiene ad A scriveremo $a \notin A$. L'insieme che non ha alcun elemento viene detto "insieme vuoto", e viene indicato con \emptyset oppure con $\{ \}$.

Un insieme si puo' dare esplicitamente descrivendo i suoi elementi, oppure implicitamente dando una proprieta' che li caratterizza. Ad esempio si puo' porre

$$A = \{a, e, i, o, u\} = \{x : x \text{ e' una lettera vocale dell'alfabeto italiano}\};$$

la prima uguaglianza si legge "A e' l'insieme degli elementi a, e, i, o, u ", e la seconda uguaglianza si legge "A e' l'insieme degli elementi x tali che x e' una lettera vocale dell'alfabeto italiano"; per un tale insieme A si ha $i \in A$, e $b \notin A$.

Certi termini e locuzioni, che ricorrono spesso nel discorso, vengono indicati con simboli appositi, che introdurremo mano a mano.

Si dice che un insieme A "e' contenuto" in un insieme B , o che A e' un "sottinsieme" di B , e si scrive $A \subseteq B$, se ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B ; in altri termini: per ogni x , x appartenente ad A implica x appartenente a B ; questa frase si scrive

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Si dice che un insieme A e' uguale ad un insieme B , e si scrive $A = B$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$; in altri termini: per ogni x , x appartenente ad A equivale a x appartenente a B ; questa frase si scrive

$$\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Si dice che un insieme A e' contenuto strettamente in un insieme B , e si scrive $A \subset B$, se A e' contenuto in B ed $A \neq B$; in altri termini: per ogni x , x appartenente ad A implica x appartenente a B , ed esiste un y appartenente a B e non appartenente ad A ; questa frase si scrive

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B, \quad \text{ed} \quad \exists y : y \in B \text{ e } y \notin A.$$

Diamo per buona una conoscenza ingenua della nozione di insieme "finito" o "infinito", e della nozione di "numero di elementi" o "cardinalita'" di un insieme finito; indicheremo la cardinalita' di un insieme finito A col simbolo $|A|$. In un certo senso, il primo insieme infinito e' l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

e i suoi sottinsiemi

$$\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots$$

sono i "modelli" degli insiemi finiti con 1, 2, 3, ... elementi; così'

$$|\{1,2,\dots,n\}| = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insieme delle parti. L'insieme dei sottinsiemi di un insieme A viene detto insieme delle parti di A e viene indicato con $\mathcal{P}(A)$; in simboli:

$$\mathcal{P}(A) = \{X; X \subseteq A\}.$$

Di seguito riportiamo gli insiemi delle parti degli insiemi prototipo con 1, 2, 3 elementi.

$$\mathcal{P}(\{\}) = \{\{\}\};$$

$$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\{\}, \{1\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Osserviamo che

$$|\mathcal{P}(\{\})| = 1, \quad |\mathcal{P}(\{1\})| = 2, \quad |\mathcal{P}(\{1,2\})| = 4, \quad |\mathcal{P}(\{1,2,3\})| = 8;$$

cio' fa pensare che

$$|\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\})| = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

E così' e'. Infatti, per ogni n fissato, un sottinsieme X dell'insieme $\{1,2,\dots,n\}$ e' individuato da una serie di risposte si/no alle seguenti domande:

$$1 \in X? \quad 2 \in X? \quad \dots \quad n \in X?$$

e le possibili serie di risposte sono $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$ (n volte) $= 2^n$.

Unione, Intersezione, Differenza Per ogni due insiemi A, B ,

- l'insieme intersezione di A e B e' l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\};$$

- l'insieme unione di A e B e' l'insieme $A \cup B$ costituito dagli elementi che appartengono ad A oppure a B (non si esclude che appartengano ad entrambi):

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\};$$

- l'insieme differenza dell'insieme A meno l'insieme B e' l'insieme $A \setminus B$ costituito dagli elementi che appartengono ad A ma non a B

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\};$$

Se $A \cap B = \emptyset$ allora si dice che A e B sono "disgiunti".

Nel caso di insiemi finiti, le cardinalita' dell'insiemi unione e' data da

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \quad \text{se } A \cap B = \emptyset.$$

Nel caso generale, si ha che

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Infatti

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B \setminus A| \\ &= |A| + |B \setminus A| + |A \cap B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|. \end{aligned}$$

Prodotto cartesiano. Siano A e B due insiemi. Il *prodotto cartesiano* di A per B , indicato con $A \times B$, e' l'insieme delle coppie ordinate, costituite da un primo elemento in A ed un secondo elemento in B :

$$A \times B = \{(a,b); a \in A, b \in B\}.$$

Ad esempio, se $A = \{1, \dots, 4\}$ e $B = \{1, \dots, 5\}$ allora $A \times B$ si puo' identificare con l'insieme dei punti del diagramma

5	·	·	·	·
4	·	·	·	·
3	·	•	·	·
2	·	·	·	·
1	·	·	·	·
	1	2	3	4

ad esempio la coppia $(2,3)$ e' identificata col punto •.

Nel caso finito di ha

$$|A \times B| = |A||B|.$$

1.2 Numeri razionali

Operazioni, ordinamento. Indichiamo con $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ gli insiemi dei numeri naturali, interi relativi, e razionali:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\};$$

i numeri naturali vengono identificati con gli interi relativi non negativi, e i numeri interi relativi vengono identificati con le frazioni a denominatore 1, così si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Concentriamo la nostra attenzione sull'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} . In \mathbb{Q} sono definite

1. due operazioni, di somma $+$ e prodotto \cdot ; ciascuna operazione è associativa e commutativa, le due operazioni sono legate dalla proprietà distributiva; ci sono dei numeri speciali, 0 e 1, che sono elementi neutri per le due operazioni; ogni $q \in \mathbb{Q}$ possiede un opposto $-q \in \mathbb{Q}$, caratterizzato dalla condizione $q + (-q) = 0$, ogni $q \in \mathbb{Q}$ diverso da 0 possiede un inverso $q^{-1} \in \mathbb{Q}$, caratterizzato dalla condizione $qq^{-1} = 1$;
2. una relazione d'ordine totale \leq , legata alle operazioni dalle proprietà che $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$,

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c;$$

$$a < b \text{ e } c > 0 \Rightarrow ac < bc;$$

$$a < b \text{ e } c < 0 \Rightarrow ac > bc.$$

Un insieme numerico con due operazioni di somma e prodotto con le proprietà in (1) si dice "campo"; un campo con una relazione d'ordine totale con le proprietà in (2) si dice "campo ordinato".

Potenze con esponente intero relativo. Per ogni numero razionale $a \in \mathbb{Q}$ e per ogni intero relativo $n \in \mathbb{Z}$, la potenza di base a ed esponente n è definita da

$$a^n = \begin{cases} aa \cdots a & (n \text{ volte}) & \text{per } n > 0; \\ 1 & & \text{per } n = 0; \\ a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1} & (-n \text{ volte}) & \text{per } n < 0; \end{cases}$$

le potenze con esponente nullo o negativo sono definite solo per $a \neq 0$.

Ad esempio si ha:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Le potenze ad esponente intero relativo hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}; \\ (a^m)^n &= a^{mn}; \\ (ab)^m &= a^m b^m. \end{aligned}$$

Incommensurabilità. Il fatto geometrico che in un quadrato la diagonale non è commensurabile con il lato corrisponde al seguente fatto algebrico. L'equazione

$$x^2 = 2$$

non ha soluzioni in \mathbb{Q} .

Lo proviamo per assurdo. Supponiamo che l'equazione abbia soluzioni in \mathbb{Q} ; allora l'equazione avr  due soluzioni, una opposta dell'altra; sia $\frac{m}{n}$ la soluzione positiva dell'equazione. Si ha dunque

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2; \quad \frac{m^2}{n^2} = 2; \quad m^2 = 2n^2.$$

Ora, m ed n hanno una fattorizzazione in primi:

$$\begin{aligned} m &= 2^a 3^b \dots, & a, b, \dots &\in \mathbb{N}, \\ n &= 2^c 3^d \dots, & a, b, \dots &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$(2^a 3^b \dots)^2 = 2(2^c 3^d \dots)^2,$$

cioe'

$$2^{2a} 3^{2b} \dots = 2^{2c+1} 3^{2d} \dots.$$

Osserviamo che l'esponente di 2 al primo membro e' pari, mentre al secondo membro e' dispari. Abbiamo cosi' un numero naturale che ha due fattorizzazioni in primi diverse, contro il teorema di fattorizzazione unica.

Rappresentazione decimale. Ogni frazione puo' essere riguardata come una divisione fra interi; effettuando questa divisione applicando "all'infinito" l'algoritmo della divisione, si ottiene un numero decimale, eventualmente con infinite cifre dopo la virgola. Ad esempio si ha

$$\frac{7}{6} = 7 : 6 = 1,1666\dots = 1,1\bar{6};$$

si e' ottenuto un numero decimale periodico. Non e' un caso: ogni frazione e' rappresentata da un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola, oppure periodico.¹

Viceversa, ogni numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola oppure periodico equivale ad una frazione. Per i numeri decimali con un numero finito di cifre dopo la virgola questa affermazione e' ovvia; per i numeri decimali periodici se ne vedra' una motivazione piu' avanti.

Esistono numeri decimali con infinite cifre dopo la virgola non periodici, che dunque non rappresentano alcun numero razionale, ad esempio

$$r = 0,1010010001\dots$$

¹Ci si puo' rendere conto di questo fatto nel modo seguente. I possibili resti di una divisione di un numero naturale m per un numero naturale $n \neq 0$ sono $0, 1, \dots, n-1$; dunque si ha che: (1) o uno dei resti parziali e' 0 e la divisione porge un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola; (2) oppure, se nessuno dei resti parziali e' 0, dopo al piu' n passi si ottiene un resto parziale gia' ottenuto in precedenza e l'iterazione della divisione porge un numero decimale periodico.