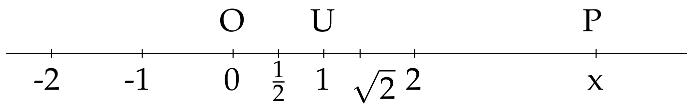
1 Sistemi lineari.

1.1 Coordinate sulla retta e nel piano; rette nel piano

Coordinate sulla retta. Scelti su una retta un primo punto O (origine) ed un diverso secondo punto U (unita'), l'identificazione del numero 0 con O e del numero 1 con U si estende in modo naturale ad una identificazione prima dei numeri naturali, poi dei numeri interi relativi, poi dei numeri razionali, e infine dei numeri reali con i punti della retta: ogni numero reale e' identificato con un punto della retta, ed ogni punto della retta si ottiene da uno ed un solo numero reale. I punti O e U costituiscono un sistema di riferimento sulla retta; per ciascun punto P, il numero reale x corrispondente si dice "coordinata" di P, o "ascissa" di P, rispetto al sistema di riferimento.
Un segmento orientato e' un segmento con un verso di percorrenza privilegiato; il segmento orientato avente estremi A e B, col verso di percorrenza da A a B si indica con AB, e il segmento orientato avente estremi A e B, col verso di percorrenza da B ad A si indica con BA. La una misura con segno $\overline{\mathrm{AB}}$ del segmento orientato AB rispetto al riferimento fissato e' definita come la misura del segmento AB rispetto al segmento OU, presa col segno piu' o col segno meno secondo che AB e OU abbiano lo stesso verso o vero opposto. Se A e B hanno ascisse rispettivamente a e b, allora

$$\overline{\mathrm{AB}} = b - a$$



Sistemi di riferimento nel piano. Siano fissati nel piano: un punto O (origine), una prima retta (I asse) per O, ed una diversa seconda retta (II asse) per O; un punto U_1 sul I asse e un punto U_2 sul II asse, diversi da O. Solitamente, si fissa il II asse perpendicolare al I asse, e i due punti alla stessa distanza da O. Su ciascun asse, il punto O e il punto fissato costituiscono un sistema di riferimento.
A ciascuna una coppia ordinata (a_1, a_2) di numeri reali, si associa un punto A del piano nel modo seguente: a_1 si identifica con un punto A_1 del I asse, e a_2 si identifica con un punto A_2 del II asse; la retta per A_1 parallela al II asse e la retta per A_2 parallela al I asse si intersecano in un punto A del piano. Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali e l'insieme $\mathfrak{P}$ dei punti del piano: ad ogni coppia corrisponde un punto del piano, ed ogni punto del piano proviene da una ed una sola coppia.
Si dice che l'origine, i due assi, e i punti fissati su essi costituiscono un sistema di riferimento per il piano $\mathfrak{P}$. Se alla coppia (a_1, a_2) corrisponde un punto A, allora si dice che A e' il punto di coordinate (a_1, a_2) nel sistema, e si scrive

$$A(a_1, a_2).$$

Solitamente, il I asse viene detto asse x, e il II asse viene detto asse y.

Rette nel piano. Alle coppie $(0, k)$ corrispondono punti sull'asse y, e tutti i punti sull'asse y provengono da tali coppie; dunque l'asse y ha equazione $x = 0$; piu' in generale, le rette parallele all'asse y hanno equazione

$$x = h, \qquad (h \textit{ costante } \in \mathbb{R}.)$$

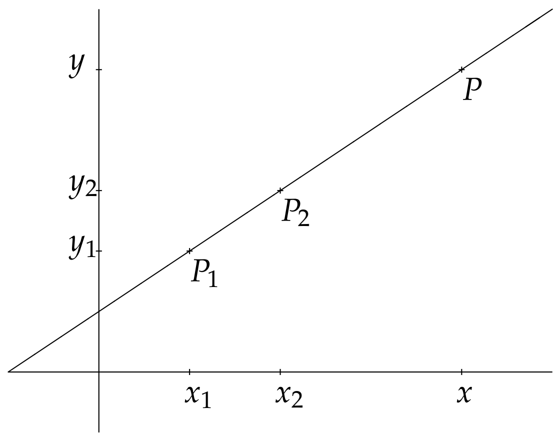
Analogamente, l'asse x ha equazione $y = 0$; piu' in generale, le rette parallele all'asse x hanno equazione

$$y = h, \qquad (h \textit{ costante } \in \mathbb{R}.)$$

Siano P_1 e P_2 due punti diversi, che non stanno su una retta parallela all'asse y; la *pendenza del segmento* P_1P_2 rispetto al sistema di riferimento e' il rapporto fra la misura con segno della proiezione del segmento orientato P_1P_2 sull'asse y e la misura con segno della proiezione del segmento orientato P_1P_2 sull'asse x. Se le coordinate dei due punti sono $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, allora si ha che la pendenza del segmento P_1P_2 rispetto al sistema di riferimento e' data dal il rapporto dell'incremento delle seconde coordinate sull'incremento delle prime coordinate:

$$\textit{pendenza di } P_1P_2 \;=\; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sia r una retta non parallela all'asse y; la *pendenza della retta* r e' la pendenza di un qualsiasi segmento con estremi su r. In effetti tutti i segmenti con estremi su una stessa retta hanno la stessa pendenza, e questa proprieta' caratterizza le rette fra le altre curve.



Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti diversi, che non stanno su una retta parallela all'asse y, e sia r la retta passante per P_1 e P_2. Un punto $P(x, y)$ diverso da P_1 appartiene alla retta r se e solo se

$$\textit{pendenza di } P_1P \;=\; \textit{pendenza di } P_1P_2,$$

cioe'

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Da cio' segue che l'equazione della retta r per i due punti P_1 e P_2 e'

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

L'equazione della retta di pendenza m per un punto $P_0(x_0,y_0)$ e'

$$y-y_0=m(x-x_0);$$

esplicitando la y, e mettendo assieme le costanti, si ottiene un'equazione del tipo

$$y=mx+q.$$

Questa e' l'equazione canonica della retta; ad essa corrisponde la retta di pendenza m passante per $(0,q)$.

Esercizio Si traccino le rette per il punto $(1,2)$ aventi pendenza $m=0,\pm1,\pm2,\frac{1}{2}$, e si scrivano le equazioni di queste rette per $m=1,-2,\frac{1}{2}$.

Ciascuna retta del piano (parallela o meno all'asse y) e' dunque rappresentata da un'equazione del tipo

$$ax+by=c,$$

dove a,b,c sono costanti in $\mathbb{R}$, dove i coefficienti a,b non sono entrambi nulli; viceversa, ciascuna di queste equazioni rappresenta una retta.

1.2 Equazioni lineari in una o due incognite

Equazioni lineari in una incognita. Un'equazione lineare in una incognita reale x e' un'equazione della forma

$$ax=b,$$

con a,b costanti reali; a e' il coefficiente e b e' il termne noto dell'equazione. Una soluzione dell'equazione e' un numero reale che sostituito all'incognita rende vero l'uguale.
Ciascuna equazione nella quale il coefficiente a e' diverso da zero ha una ed una sola soluzione, data da $x=a^{-1}b$. Ciascuna equazione $0x=b$ con $b\neq0$ non ha soluzioni. L'equazione $0x=0$ ha per soluzioni tutti i numeri reali.

Sistemi di equazioni lineari in due incognite. Per "equazione lineare nelle incognite x,y" intendo un'equazione del tipo

$$ax+by=c,$$

dove a, b, c sono tre costanti reali; a e b sono i "coefficienti" e c e' il "termine noto" dell'equazione. Una "soluzione" dell'equazione e' una coppia ordinata (r, s) di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite x e y renda vera l'uguaglianza, cioe' tale che

$$ar + bs == c.$$

Tranne che nel caso "degenere", in cui $a = b = 0$, le soluzioni dell'equazione formano una retta nel piano.

Il generico sistema di di m equazioni lineari nelle incognite x, y si puo' rappresentare nella forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \quad\vdots \\ a_mx + b_my = c_m \end{cases},$$

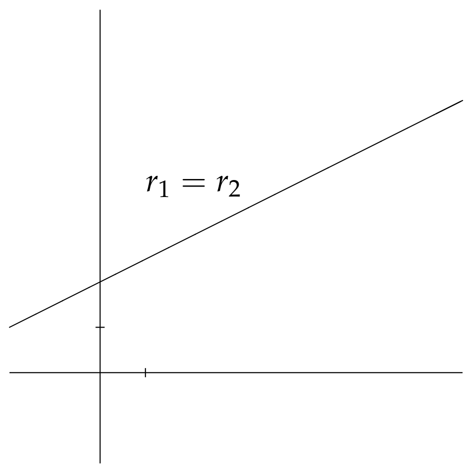
dove $a_1, b_1, c_1, \ldots, a_m, b_m, c_m$ sono costanti reali; gli a_i e i b_i sono i "coefficienti" e i c_i sono i "termini noti" dell'equazione. Una "soluzione" dell'equazione e' una coppia ordinata (r, s) di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite x e y rende vera ciascuna uguaglianza. Il sistema e' "determinato", "impossibile", "indeterminato" secondo che possieda esattamente una soluzione, nessuna soluzione, infinite soluzioni. Il problema di determinare le soluzioni di un sistema di m equazioni lineari non degeneri in x, y equivale al problema di determinare l'intersezione di m rette nel piano.

Il generico sistema di due equazioni lineari in x, y e'

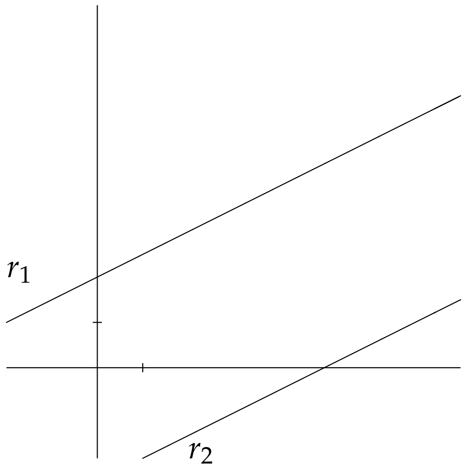
$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{cases},$$

dove $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sono costanti reali. Supponiamo che $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ e $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$, cosi' che alle due equazioni corrispondano due rette r_1 e r_2. Allora si hanno i tre casi:

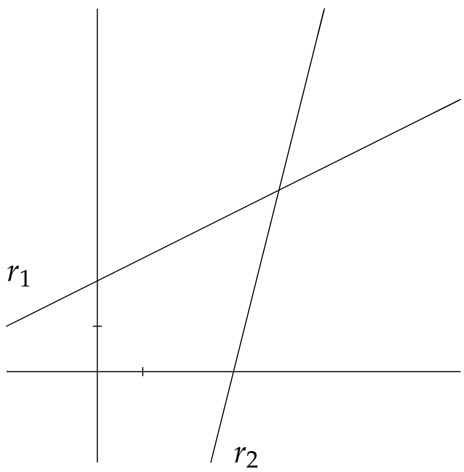
- se le due terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono proporzionali, allora le due equazioni sono equivalenti. Le due rette r_1 ed r_2 sono coincidenti.



- se le due coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono proporzionali e le due terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) non sono proporzionali, allora le due equazioni sono incompatibili, e il sistema e' impossibile. Le due rette r_1 ed r_2 sono parallele e distinte.



- se le due coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) non sono proporzionali, allora il sistema e' determinato, con una certa soluzione (x_0, y_0). Le due rette r_1 ed r_2 sono incidenti nel punto (x_0, y_0).



Informalmente, si puo' dire che "in generale, un sistema lineare di due equazioni in due incognite e' determinato," nel senso che le altre due possibilita' si presentano solo in presenza di certe 'coincidenze'.

Metodo di eliminazione Un metodo per la risoluzione dei sistemi, che meglio si adatta al caso di un numero qualsiasi di equazioni e di incognite, e' il metodo di eliminazione, che illustriamo di seguito con un esempio.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases}$$

Eliminiamo la x dalla seconda equazione, sommando alla seconda equazione un opportuno multiplo della prima equazione:

$$\begin{cases} 4x+5y & = & 6 \\ 7x+8y-\frac{7}{4}(4x+5y) & = & 9-\frac{7}{4}6 \end{cases}$$

Di regola, facciamo il conto piu' direttamente coefficiente per coefficiente:

$$\begin{cases} 4x+5y & = & 6 \\ (7-\frac{7}{4}4)x+(8-\frac{7}{4})y & = & 9-\frac{7}{4}6 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} 4x+5y & = & 6 \\ -\frac{3}{4}y & = & -\frac{6}{4} \end{cases}$$

Ricaviamo dalla seconda equazione il valore della y, sostituiamo nella prima equazione questo valore alla y, e ricaviamo il valore della x :

$$y=2; \qquad 4x+10=6, \quad x=-1$$

Il sistema e' determinato, con soluzione

$$(x,y)=(-1,2).$$

Descriviamo ora il metodo di eliminazione per la risoluzione di un arbitrario sistema lineare di due equazioni

$$\begin{cases} a_1x+b_1y & = & c_1 \\ a_2x+b_2y & = & c_2 \end{cases}$$

nelle due incognite x,y.
Il passo fondamentale consiste nel sommare alla seconda equazione un multiplo della prima

$$\begin{cases} a_1x+b_1y & = & c_1 \\ a_2x+b_2y+\lambda(a_1x+b_1y) & = & c_2+\lambda c_1 \end{cases};$$

questa operazione lascia invariato l'insieme delle soluzioni del sistema. Mettendo in evidenza i coefficienti delle incognite si ha

$$\begin{cases} a_1x+b_1y & = & c_1 \\ (a_2+\lambda a_1)x+(b_2+\lambda b_1)y & = & c_2+\lambda c_1 \end{cases}.$$

Sotto la condizione $a_1 \neq 0$, c'e' uno ed un solo valore di λ che rende nullo il coefficiente della x nella seconda equazione:

$$a_2+\lambda a_1=0; \qquad \lambda=-\frac{a_2}{a_1}.$$

Per tale valore di λ il sistema diventa del tipo

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ b_1' y &= c_2' \end{cases} .$$

Sotto la condizione $b_2' \neq 0$, dalla seconda equazione ricaviamo in modo univoco il valore della y; sostituiamo nella prima equazione alla y questo valore e ricaviamo in modo univoco il valore della x.
Sotto le condizioni $a_1 \neq 0$ e $b_2' \neq 0$ abbiamo cosi' che il metodo funziona e il sistema e' determinato. Un'analisi un po' piu' approfondita mostra che il metodo di eliminazione funziona e il sistema e' determinato se e solo se

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

1.3 Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Siano dati un intero positivo n ed una sequenza di n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Per "equazione lineare nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$" intendo un'equazione del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ sono costanti reali; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono i "coefficienti" e b e' il "termine noto" dell'equazione. In breve, possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b.$$

Una "soluzione" dell'equazione e' una ennupla ordinata $(r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ di numeri reali che sostituiti ordinatamnte ale incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ renda vera l'uguaglianza, cioe' tale che

$$\sum_{j=1}^{n} a_j r_j = b.$$

Tranne che nel caso "degenere", in cui $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0$, l'equazione ha infinite soluzioni, e ci sono $n-1$ incognite libere.

Siano dati un intero positivo m, un intero positivo n ed una sequenza di n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Un sistema di m equazioni lineari nelle incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' una sequenza di m equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} , \qquad (1)$$

in breve

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, \ldots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i coefficienti e i b_i sono i termini noti del sistema. Una soluzione del sistema e' una ennupla ordinata di unumeri reali $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ che sia soluzione di ciascuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Un sistema si dice

- "impossibile" se non possiede alcuna soluzione;
- "determinato" se possiede una ed una sola soluzione;
- "indeterminato" se possiede infinite soluzioni.

Vedremo in seguito che questi sono tutti i casi possibili; in altri termini, se un sistema ha piu' di una soluzione, aloora ne ha infinite.
Diciamo che due sistemi lineari sono "equivalenti" quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.