1 Numeri reali

1.1 Numeri reali

Per "numero reale" intendiamo un qualsiasi numero decimale, con un numero di cifre dopo la virgola finito o infinito, periodico o non periodico; possiamo pensare un numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola come un numero periodico con periodo zero. Dunque un numero reale e' dato mediante una scrittura

$$\pm c_m \cdots c_2 c_1 c_0, c_{-1} c_{-2} \cdots$$

dove $m \in \mathbb{N}$ e $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Intendiamo che due scritture diverse rappresentino due numeri reali diversi, con le eccezioni ovvie e l'eccezione di certe coppie date da una scrittura periodica di periodo 9 e una scrittura periodica di periodo 0, come

$$15,3499\ldots = 15,3500\ldots$$

L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$.

> Si estendono, in modo non banale, le operazioni di somma e prodotto da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$; con queste operazioni $\mathbb{R}$ e' un campo.

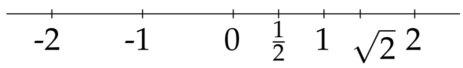
Mediante il concetto di serie (che vedremo), la scrittura di sopra puo' essere interpretata come

$$\pm \left(c_m 10^m + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10 + c_0 + c_{-1} 10^{-1} + c_{-2} 10^{-2} + \cdots \right).$$

Radice di 2. Consideriamo l'equazione $x^2 = 2$ nell'incognita x in $\mathbb{R}$; dalle proprieta' delle operazioni segue che, se questa equazione ha soluzioni, allora ne ha esattamente due, una opposta dell'altra. Cerchiamo dunque una soluzione positiva dell'equazione. Consideriamo la disequazione $x^2 \leq 2$ nell'incognita x in $\mathbb{Q}^+$; fra le soluzioni intere ce ne e' una massima ed e' 1; fra le soluzioni con una cifra decimale ce ne e' una massima ed e' $1,4$; fra le soluzioni due cifre decimali ce ne e' una massima ed e' $1,41$; fra le soluzioni tre cifre decimali ce ne e' una massima ed e' $1,414$; ... si ottiene cosi' un numero reale $r = 1,414\ldots$. Si dimostra che $r^2 = 2$.

L'insieme dei numeri razionali e' strettamente contenuto nell'insieme dei numeri reali: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; i numeri reali non razionali si dicono "irrazionali"; ad esempio $\sqrt{2} = 1,414\ldots$, pi greco $\pi = 3.141\ldots$ e il numero di Nepero $e = 2,718\ldots$. sono irrazionali; i numeri irrazionali che non sono radici di alcun polinomio a coefficienti razionali si dicono "trascendenti"; ad esempio pi greco e il numero di Nepero sono trascendenti.

Retta reale. Scelti su una retta un primo ed un diverso secondo punto, l'identificazione del numero 0 col primo punto e del numero 1 col secondo punto si estende in modo naturale prima ad una identificazione dei numeri naturali con certi punti, poi ad una identificazione dei numeri interi relativi con certi punti, poi ad una identificazione dei numeri razionali con certi punti, ed infine in modo non banale ad una identificazione dei numeri reali con tutti i punti della retta: ogni numero reale e' identificato con un punto della retta, ed ogni punto della retta si ottiene da uno ed un solo numero reale.



Richiami sui polinomi, I. Informalmente, si puo' dire che i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ sono le espressioni che si possono scrivere a partire da "indeterminate" e dai numeri reali mediante operazioni di somma e prodotto, e sulle quali si opera usando soltanto le proprieta' commutativa ed associativa di ciascuna operazione, e distributiva del prodotto rispetto alla somma.
Un polinomio in una indeterminata x a coefficienti reali e' un'espresione del tipo

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

in breve,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

dove gli a_i sono dei numeri reali, detti coefficienti del polinomio; se $a_n \neq 0$, allora si dice che $p(x)$ ha grado n, e si scrive $\mathrm{gr}(p(x)) = n$; per il polinomio nullo non si definisce il grado. Il grado del polinomio prodotto e' la somma dei gradi dei polinbomi fattori

$$\mathrm{gr}(p(x)q(x)) = \mathrm{gr}(p(x)) + \mathrm{gr}(q(x)).$$

Per ogni $r \in \mathbb{R}$, sostituendo r all'indeterminata x in $p(x)$ si ottiene un numero reale $p(r) = a_n r^n + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$, che si dice "valutazione" di $p(x)$ in r. Il principio di identita' dei polinomi afferma che due polinomi hanno la stessa valutazione in ciascun numero reale se e solo se hanno gli stessi coefficienti: dati

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

si ha che $p(r) = q(r)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$ se e solo se $a_i = b_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$.

Potenze del binomio. Fra le prime identita' del calcolo algebrico ci sono il quadrato del binomio $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, il cubo $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, ... e una regola per calcolare la potenza ennesima del binomio $(x+1)^n$. Di seguito ricaviamo questa regola dalle proprieta' delle operazioni sui polinomi.
Per ciascun $n, i \in \mathbb{N}$, diciamo "coefficiente binomiale n su i" ed indichiamo con $\binom{n}{i}$ il coefficiente di x^i in $(x+1)^n$, poniamo cioe'

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i.$$

I numeri cosi' definiti formano una matrice infinita, le cui prime tre righe sono date da

	0	1	2	3	4	...
0	1	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	...
3	1	3	3	1	0	...

Di seguito proviamo che i coefficienti binomiali soddisfano una ben nota ricorsione. Consideriamo l'identita'

$$(x+1)^{n+1} = (x+1)^n(x+1);$$

sostituiamo alle potenze al I e II membro le loro espansioni nei termini dei rispettivi coefficienti binomiali

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^i = \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right](x+1);$$

sviluppiamo il II membro usando la proprieta' distributiva

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{j+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

Per ciascun $i > 0$, uguagliando il coefficiente di x^i al I membro al coefficiente di x^i al II membro, si ha

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$$

Usando questa ricorsione si puo' ad esempio determinare la quarta riga della matrice

	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	...

e ricavare

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Polinomi simmetrici elementari. Un'altra delle prime identita' e'

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1+a_2)x + a_1a_2;$$

un calcolo diretto porta alla

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x + a_1a_2a_3.$$

In generale, si trova che

$$(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n) = \sum_{k=0}^{n} e_k(a_1,a_2,\dots,a_n)x^{n-k},$$

dove $e_k(a_1,a_2,\dots,a_n)$ e' $k-$mo polinomio simmetrico elementare in $a_1,a_2,\dots,a_n$, dato da

$$e_k(a_1,a_2,\dots,a_n) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$$

Radici Se la valutazione di un polinomio $p(x)$ su numero reale $r\in\mathbb{R}$ e' zero, cioe' se $p(r)=0$, allora si dice che r e' una "radice" di $p(x)$. Vale il

> Teorema (Ruffini). Sia $p(x)$ un polinomio non nullo, e sia $r\in\mathbb{R}$; allora r e' una radice di $p(x)$ se e solo se il binomio $x-r$ divide $p(x)$ cioe' $p(x)$ si puo' scrivere come
>
> $$p(x) = (x-r)q(x);$$
>
> dove $q(x)$ e' un polinomio di grado $n-1$.

Il teorema di consiste di due affermazioni: (1) se il binomio $x-r$ divide $p(x)$ allora r e' una radice di $p(x)$ (affermazione ovvia), (2) se r e' una radice di $p(x)$ allora il binomio $x-r$ divide $p(x)$. La "regola di Ruffini" da un modo per costruire il polinomio quoziente $q(x)$. Il Teorema di Ruffini ha un'importante conseguenza:

> Un polinomio di grado n a coefficienti reali ha al piu' n radici.

Ordinamento. La relazione d'ordine totale $\leq$ su $\mathbb{Q}$ si estende ad una relazione d'ordine totale $\leq$ su $\mathbb{R}$. In particolare, per due numeri reali

$$\begin{aligned} r &= c, c_{-1}c_{-2}c_{-3}\dots \\ s &= d, d_{-1}d_{-2}d_{-3}\dots, \end{aligned}$$

dove c e d sono le scritture (decimali) di due numeri naturali, si pone $r<s$ se e solo se

$c<d$, oppure
$c=d$, e $c_{-1}<d_{-1}$, oppure
$c,c_{-1}=d,d_{-1}$ e $c_{-2}<d_{-2}$, oppure ...

> $\mathbb{R}$, con le operazioni di somma e prodotto e con la relazione d'ordine sopra menzionate, e' un campo ordinato.

Si ha dunque l'usuale "legge dei segni" che lega il segno del prodotto ai segni dei fattori. In particolare, dato un trinomio di II grado

$$p(x) = ax^2+bx+c, \qquad (a>0)$$

ed indicato con $\Delta = b^2 - 4ac$ il suo discriminante, si ha

(1) se $\Delta > 0$, indicate con $r_1 < r_2$ le radici di $p(x)$ si ha che

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \begin{cases} > 0 \text{ per } x < r_1 \\ < 0 \text{ per } r_1 < x < r_2 \\ > 0 \text{ per } x > r_2 \end{cases}$$

(2) se $\Delta = 0$, indicata con r la radice doppia di $p(x)$ si ha che

$$p(x) = a(x - r)^2 > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \text{ con } x \neq r$$

(3) se $\Delta < 0$, si ha che

$$p(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Risultati analoghi valgono nel caso $a < 0$.