Sistemi lineari

Sistemi lineari in tre incognite; esempi tipici

Tre equazioni. Consideriamo il seguente sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} x & -2y & +6z & = & 11 \\ -x & +3y & -11z & = & -18 \\ 2x & -5y & +20z & = & 32 \end{cases}$$

Questo sistema puo' essere risolto col metodo di eliminazione come segue.
Usiamo la prima equazione per eliminare la x dalla seconda e dalla terza equazione, sommando alla seconda equazione la prima equazione, e sommando alla terza equazione la prima equazione moltiplicata per (-2); otteniamo

$$\begin{cases} x & -2y & +6z & = & 11 \\ & y & -5z & = & -7 \\ & -y & +8z & = & 10 \end{cases}$$

Usiamo la seconda equazione per eliminare la y dalla terza equazione, sommando alla terza equazione la seconda equazione; otteniamo

$$\begin{cases} x & -2y & +6z & = & 11 \\ & y & -5z & = & -7 \\ & & +3z & = & 3 \end{cases}$$

Dalla terza equazione ricaviamo il valore di z; otteniamo $z = 1$;
nella seconda equazione sostituiamo il valore di z e ricaviamo il valore di y; otteniamo $y - 5 = -7$, e $y = -2$;
nella prima equazione sostituiamo i valori di y e z e ricaviamo il valore di x; otteniamo $x + 4 + 6 = 11$, e $x = 1$.
Il sistema e' determinato, con soluzione
$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 1,$
cioe' $(1, -2, 1)$.

Due equazioni. Consideriamo il seguente sistema di due equazioni lineari nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} x & -2y & +6z & = & 11 \\ -x & +3y & -11z & = & -18 \end{cases}$$

Questo sistema puo' essere risolto col metodo di eliminazione come segue.
Usiamo la prima equazione per eliminare la x dalla seconda equazione, sommando alla seconda equazione la prima equazione; otteniamo

$$\begin{cases} x & -2y & +6z & = & 11 \\ & y & -5z & = & -7 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo y in funzione di z; otteniamo $y = 5z - 7$;
nella prima equazione sostituiamo l'espressione y in funzione di z e ricaviamo x in funzione di z; otteniamo $x - 2(5z - 7) + 6z = 11$, e $x = 4z - 3$.
Il sistema e' indeterminato, con soluzioni date da

$$x = 4z - 3, \quad y = 5z - 7, \quad z = \text{ qualsisi}$$

in altri termini

$$(4z - 3,\ 5z - 7,\ z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Una equazione. Consideriamo l'equazione lineare nelle tre incognite x, y, z

$$x - 2y + 6z = 11.$$

Questa equazione puo' essere risolta ricavando x in funzione di y e z.
Il sistema e' indeterminato, con soluzioni date da

$$x = 2y - 6z + 11, \quad y = \text{qualsisi}, \quad z = \text{ qualsisi}$$

in altri termini

$$(2y - 6z + 11,\ y,\ z), \quad \forall y, z \in \mathbb{R}.$$

Gli esempi considerati sono tipici; in generale ci si aspetta quanto segue, manon sempre e' cosi'.
-un sistema di tre equazioni in tre incognite sia determinato;
-un sistema di due equazioni in tre incognite sia indeterminato, con soluzione generale che dipende da una variabile libera;
-una equazione in tre incognite sia indeterminato, con soluzione generale che dipende da due variabili libere.

Sistemi lineari in tre incognite; discussione

Una equazione. Consideriamo la generica equazione lineare nelle tre incognite x, y, z

$$ax + by + cz = d, \qquad (a, \ldots, d \in \mathbb{R}).$$

Si hanno tre casi:

(1) Se almeno uno dei coefficienti a, b, c e' diverso da zero, allora l'equazione puo' essere risolta ricavando una incognita in funzione delle altre due. Il sistema e' indeterminato; la soluzione generale dipende da due varaibili libere.

(2) Se tutti i coefficienti a, b, c e il termine noto d sono uguali a zero, allora l'equazione e' indeterminata, tutte le variabili sono libere.

(3) Se tutti i coefficienti a, b, c sono uguali a zero ma il termine noto e' diverso da zero, allora l'equazione e' impossibile.
Nei casi (2) e (3) diciamo che l'equazione e' "degenere".

Due equazioni. Consideriamo il generico sistema di due equazioni lineari nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \qquad (a_1, \ldots, d_2 \in \mathbb{R})$$

Supponiamo per brevita' che nessuna delle due equazioni sia degenere. Si hanno tre casi:

(1) le quaterne (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) dei parametri delle due equazioni sono fra loro proporzionali; in questo caso le due equazioni hanno lo stesso insieme di soluzioni; il sistema e' indeterminato con soluzione generale che dipende da due variabili libere. [1]

(2) le quaterne (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) dei parametri delle due equazioni non sono fra loro proporzionali, ma le terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) dei coefficienti sono fra loro proporzionali; in questo caso le due equazioni sono fra loro incompatibili; il sistema e' impossibile [2]

(3) le terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) dei coefficienti non sono fra loro proporzionali; in questo caso il sistema e' indeterminato, con una soluzione generale che dipende da una variabile libera.

Tre equazioni. Consideriamo il generico sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad (a_1, \ldots, d_3 \in \mathbb{R})$$

Questo caso non si puo' trattare usando solo le nozioni di degeneratezza e proporzionalita'. Qui diamo solo un paio di esempi di questo fatto; riprenderemo la questione piu' avanti.

Nel sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \\ 5x + 7y + 9z = 3 \end{cases}$$

la terza equazione e' la somma delle prime due, dunque il sistema delle tre equazioni equivale al sistema delle prime due, ed e' indeterminato con una incognita libera.

[1] Un esempio:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 6x + 9y + 12z = 3 \end{cases}$$

[2] Un esempio:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 6x + 9y + 12z = 2 \end{cases}$$

Nel sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \\ 5x + 7y + 9z = 4 \end{cases}$$

il membro di sinistra della terza equazione e' la somma dei membri di sinistra delle prime due, ma il termine noto della terza equazione non e' la somma dei termini noti delle prime due, dunque il sistema e' impossibile.

Sistemi di riferimento nello spazio; piani nello spazio

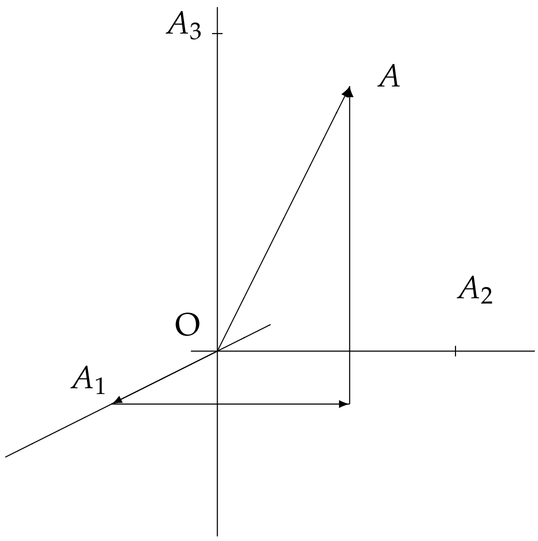
Fissati nello spazio

> un punto O (origine), una prima retta per O (asse I) con un punto U_1 diverso da O, una seconda retta per O (asse II), ortogonale alla prima, con un punto U_2 diverso da O, ed una terza retta per O (asse III), ortogonale alle prime due, con un punto U_3 diverso da O,

c'e' un modo naturale di associare a ciascuna terna ordinata di numeri reali un punto dello spazio, in modo che

> alla terna $(0,0,0)$ corrisponda l'origine O, alla terna $(1,0,0)$ corrisponda il punto U_1, alla terna $(0,1,0)$ corrisponda il punto U_2, e alla terna $(0,0,1)$ corrisponda il punto U_3.

Espicitamente, ad una terna (a_1, a_2, a_3) di numeri reali si associa il punto A costruito nel modo seguente. A ciascun numero a_i corrisponde un punto A_i sull'iesimo asse; i segmenti OA_1, OA_2, OA_3 sono i lati di un parallelepipedo; e il vertice di questo parallelepipedo opposto ad O e' il punto A.
Ciascun punto dello spazio si ottiene in corrispondenza di una ed una sola terna (x, y, z) di numeri reali, che vengono dette le *coordinate* del punto nel sistema di riferimento. Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}^3$ e i punti dello spazio.



Piani nello spazio Si prova che ciascun piano nello spazio e' rappresentato da un'equazione lineare in tre incognite x, y, z

$$ax + by + cz = d, \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

nella quale almeno uno dei coefficienti a, b, c e' diverso da zero; e che viceversa ciascuna di queste equazioni rappresenta un piano. La discussione dei sistemi di due equazioni in tre incognite ha il seguente significato geometrico. Consideriamo due piani α_1 e α_2 rappresentati rispettivamente dalle equazioni lineari

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \alpha_2 & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array}$$

Si ha

(1) se le quaterne (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) sono fra loro proporzionali, allora i piani α_1 e α_2 sono coincidenti.

(2) se le quaterne (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) non sono fra loro proporzionali, ma le terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) dei coefficienti sono fra loro proporzionali, allora i due piani α_1 e α_2 sono paralleli;

(3) se le terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) dei coefficienti non sono fra loro proporzionali, allora i due piani α_1 e α_2 sono incidenti in una retta.

Eliminazione; caso tipico

Nel caso tipico, dato un sistema di m equazioni in n incognite $x_1, \ldots, x_n$, si ha che: si puo' usare la prima equazione per eliminare l'incognita x_1 dalla seconda, terza ... equazione; si puo' usare la seconda equazione per eliminare l'incognita x_2 dalla terza, quarta ... equazione; ...

(1) Se $m = n$ si ottiene un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. ,$$

dove $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$. Si possono allora ricavare in modo univoco a partire dall'ultima equazione via via le incognite $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. Il sistema e' determinato.

(2) Se $m < n$, si ottiene un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{mm}x_m + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

dove $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm} \neq 0$. Si possono allora ricavare in modo univoco a partire dall'ultima equazione via via le incognite $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$ in funzione delle incognite $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Il sistema e' indeterminato, e ci sono $n - m$ incognite libere.

(3) Se $m > n$, si ottiene un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{n+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{cases},$$

dove dove $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, b_{n+1} \neq 0$. Allora l'equazione $(m+1)-$ma e' e' impossibile, e dunque anche il sistema e' impossibile.

I sistemi sopra descritti si dicono "sistemi triangolari (non degeneri)". Non sempre il processo di eliminazione porta ad un sistema triangolare, ma come vedremo lo si puo' precisare in modo che porti sempre ad un sistema "a scala".