Numeri reali. Funzioni reali di variabile reale

Relazioni fra insiemi

Una "relazione" da un insieme A ad un insieme B e' una legge $\mathcal{R}$ che ad elementi di A associa elementi di B; e' ammesso che a qualche elemento di A non associ alcun elemento di B, e che a qualche elemento di A associ piu' di un elemento di B. Gli insiemi A e B si dicono rispettivamente "dominio" e "codominio" dela relazione $\mathcal{R}$. La frase "$\mathcal{R}$ e' una relazione da A a B" si scrive in breve

$$A \xrightarrow{\mathcal{R}} B.$$

Al posto di dire che $\mathcal{R}$ associa ad un elemento $a \in A$ un elemento $b \in B$, si dice anche che "a e' nella relazione $\mathcal{R}$ con b," e si scrive $a\mathcal{R}b$. Se $A = B$ si dice che $\mathcal{R}$ e' una relazione su A.
Il "grafico" di una relazione $A \xrightarrow{\mathcal{R}} B$ e' il sottinsieme $\mathrm{gr}(\mathcal{R})$ del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito dalle coppie ordinate (a, b) tali che $a\mathcal{R}b$, in simboli:

$$\mathrm{gr}(\mathcal{R}) \subseteq A \times B, \qquad \mathrm{gr}(\mathcal{R}) = \{(a,b) \in A \times B : \ a\mathcal{R}b\}.$$

Ogni sottinsieme S del prodotto cartesiano $A \times B$ e' il grafico di una ed una sola relazione $\mathcal{R}_S$ da A a B, definita da

$$a\, \mathcal{R}_S\, b \quad \text{se e solo se} \quad (a,b) \in S.$$

Possiamo dunque dire che

> dare una relazione da un insieme A a un insieme B equivale a dare un sottinsieme di $A \times B$.

Problema Quante sono le relazioni da un insieme finito A ad un insieme finito B? Piu' precisamente, si intende: in quale modo il numero delle relazioni da A a B dipende dal numero di elementi di A e dal numero di elementi di B?
Dare una relazione da A a B equivale a dare un sottinsieme di $A \times B$, dunque il numero delle relazioni da A a B e' uguale al numero dei sottinsiemi di $A \times B$, cioe'

$$|\{\text{relazioni da } A \text{ a } B\}| = |\mathcal{P}(A \times B)|;$$

d'altro canto

$$|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A||B|}.$$

Dunque:

$$|\{\text{relazioni da } A \text{ a } B\}| = 2^{|A||B|}.$$

Funzioni fra insiemi

Le funzioni sono particolari relazioni. Una "funzione" da un insieme A ad un insieme B e' una legge f che a ciascun elemento di A associa uno ed un solo elemento di B. Gli insiemi A e B si dicono rispettivamente "dominio" e "codominio" dela funzione f. La frase "f e' una funzione da A a B" si scrive in breve

$$f : A \to B.$$

Al posto di dire che f associa all'elemento $a \in A$ l'elemento $b \in B$, si dice anche che:
"f manda a in b", e si scrive

$$f : a \mapsto b;$$

"b e' l'immagine di a tramite f" o "a e' una preimmagine di b tramite f", e si scrive

$$f(a) = b.$$

Il "grafico" di una funzione $f : A \to B$ e' il sottinsieme $\mathrm{gr}(f)$ del prodotto cartesiano $A \times B$ costituito dalle coppie ordinate (a, b) tali che $f(a) = b$, in altri termini, costituito dalle coppie ordinate del tipo $(a, f(a))$; in simboli:

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(f) &= \{(a,b) \in A \times B;\ f(a) = b\} \\ &= \{(a, f(a));\ a \in A\}. \end{aligned}$$

Non tutti i sottinsiemi del prodotto cartesiano $A \times B$ sono il grafico di una funzione da A a B.
Problema Quante sono le funzioni da un insieme finito A ad un insieme finito B?
Poniamo $|A| = m$, indichiamo con $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gli elementi di A, e poniamo $|B| = n$. Il dato di una funzione da A a B equivale alla sequenza dei seguenti dati: l'immagine di a_1 (uno qualsiasi degli n elementi di B), l'immagine di a_2 (uno qualsiasi degli n elementi di B), ..., l'immagine di a_n (uno qualsiasi degli n elementi di B); il numero di queste sequenze di dati e'

$$nn \cdots n = n^m.$$

Dunque

$$|\{\text{funzioni da } A \text{ a } B\}| = |B|^{|A|}.$$

Funzioni iniettive Una funzione $f : A \to B$ si dice "iniettiva" se ad ogni due diversi elementi di A associa due diversi elementi di B :

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2);$$

in altri termini, se ciascun elemento di B ha al piu' una preimmagine in A :

$$\forall b \in B, \quad \exists \text{ al piu' un } a \in A : f(a) = b.$$

Problema Quante sono le funzioni iniettive da un insieme finito A ad un insieme finito B?
Innanzitutto si ha

se $|A| > |B|$, allora non ci sono funzioni iniettive da A a B.

Supponiamo dunque $|A| \leq |B|$. Poniamo $|A| = m$, indichiamo con $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ gli elementi di A, e poniamo $|B| = n$. Il dato di una funzione iniettiva da A a B equivale alla sequenza dei seguenti dati: l'immagine di a_1 (uno qualsiasi degli n elementi di B), l'immagine di a_2 (uno qualsiasi degli $n-1$ elementi di B diversi dal precedente), l'immagine di a_3 (uno qualsiasi degli $n-2$ elementi di B diversi dai due precedenti), ..., l'immagine di a_n (uno qualsiasi degli $n-(m-1)$ elementi di B diversi dai precedenti); il numero di queste sequenze di dati e'

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

Dunque

$$|\{\text{funzioni iniettive da } A \text{ a } B\}| = |B|(|B|-1)(|B|-2)\cdots(|B|-|A|+1).$$

Funzioni suriettive Una funzione $f : A \to B$ si dice "suriettiva" se ciascun elemento di B ha al almeno una preimmagine in A :

$$\forall b \in B, \quad \exists\, a \in A : \ f(a) = b.$$

Problema Quante sono le funzioni suriettive da un insieme finito A ad un insieme finito B?
Si ha

se $|A| < |B|$, allora non ci sono funzioni suriettive da A a B.

Al di fuori di questa considerazione, la soluzione del problema richiede strumenti non elementari, qui non viene riportata.

Funzioni biiettive; funzione inversa Una funzione $f : A \to B$ si dice "biiettiva" se e' sia iniettiva che suriettiva, in altri termini se ciascun elemento di B ha una ed una sola una preimmagine in A :

$$\forall b \in B, \quad \exists!\, a \in A : \ f(a) = b.$$

In tal caso, la legge che associa a ciscun elemento di B la sua preimmagine in A tramite f e' una funzione da B ad A; questa funzione e' detta "funzione inversa" di f, ed e' indicata con f^{-1}. In simboli, $f^{-1} : B \to A$, e' la funzione definita da

$$f^{-1}(b) = a \ \Leftrightarrow \ f(a) = b, \qquad \forall (a,b) \in A \times B;$$

in altri termini da

$$f(f^{-1}(b)) = b, \qquad \forall b \in B.$$

Problema Quante sono le funzioni biiettive da un insieme finito A ad un insieme finito B?
Esistono funzioni biiettive da A a B se e solo se $|A| = |B|$. In tal caso si ha che una funzione $f : A \to B$ e' biiettiva se e solo se e' suriettiva se e solo se e' iniettiva. Dunque, posto $|A| = |B| = n$ si ha

$$|\{\text{funzioni biiettive da } A \text{ a } B\}| = n(n-1)(n-2)\cdots 1.$$

Questa espressione viene detta "n fattoriale" e viene indicata con $n!$.

Le funzioni biiettive da un insieme finito A in se' si dicono "permutazioni di A".

Esempio Sia $A = \{1,2,3\}$. Il numero delle permutazini di A e'

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Una delle permutazioni di A e' data dalla sequente tabella

$$\begin{array}{c|ccc} i & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(i) & 2 & 3 & 1 \end{array}.$$

La funzione inversa e' data da

$$\begin{array}{c|ccc} i & 1 & 2 & 3 \\ \hline f^{-1}(i) & 3 & 1 & 2 \end{array}.$$

Numeri reali. Intervalli

Per ciascun $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, l'insieme dei numeri reali compresi fra a e b si dice "intervallo chiuso di estremi a e b", ad si indica con $[a, b]$; in simboli:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}.$$

Un sottinsieme $I \subset \mathbb{R}$ si dice un "intervallo" di $\mathbb{R}$ se e solo se per ogni due punti $a \leq b$ con $a, b \in I$ si ha $[a, b] \subseteq I$. Si prova che gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\} \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\} \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\} \\
[a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} \\
]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} \\
]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\} \\
]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\} \\
]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Funzioni reali di variabile reale

D'ora innanzi considereremo funzioni $f : I \to J$, da un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ ad un intervallo $J \subseteq \mathbb{R}$. Il grafico di una tale funzione e' il sottinsieme

$$\mathrm{gr}(f) \subset I \times J \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2,$$

definito da

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}(f) &= \{(x,y) \in I \times J : \ f(x) = y\} \\ &= \{(x, f(x)) : \ x \in I\}. \end{aligned}$$

Identificato $\mathbb{R}^2$ col piano, si ha che $\mathrm{gr}(f)$ e' identificato con un sottinsieme del "rettangolo" $I \times J$. Un sottinsieme S del rettangolo $I \times J$ e' il grafico di una funzione $I \to J$ se e solo se ogni retta $x = h$ con $h \in I$ interseca S in uno ed un solo punto.

Funzioni monotone. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.
Si dice che f e' "monotona crescente", in breve "crescente", se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$, in breve

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \leq x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

se f soddisfa questa proprieta' con i segni $\leq$ rimpiazzati dal segno $<$, allora si dice che f e' "monotona strettamente crescente," in breve "strettamente crescente."
Si dice che f e' "monotona decrescente", in breve "decrescente", se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$, in breve

$$\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \leq x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

se f soddisfa questa proprieta' con il segno $\geq$ rimpiazzato dal segno $>$, allora si dice che f e' "monotona strettamente decrescente," in breve "strettamente decrescente."
Si dice che f e' "monotona" per intendere che f e' monotona crescente oppure monotona decrescente, e che f e' "strettamente monotona" per intendere che f e' strettamente monotona crescente o strettamente monotona decresente.

Proposizione 1 *Una funzione $f : I \to J$ e' crescente se e solo se per ogni due punti distinti $P_1, P_2 \in \mathrm{gr}(f)$, il segmento P_1P_2 ha pendenza maggiore-uguale a zero; esplicitamente, se e solo se per ogni $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \neq x_2$ si ha*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0.$$

La funzione f e' strettamente crescente se e solo se valgono le condizioni di sopra con il segno $\geq$ rimpiazzato dal segno $>$. Le funzioni decrescenti e strettamente decrescenti hanno una analoga caratterizzazione.

Infine, osserviamo che

> Se una funzione $f : I \to J$ e' strettamente monotona (crescente o decrescente), allora e' f e' iniettiva.