Numeri reali. Funzioni reali di variabile reale

Funzioni potenza ad esponente intero relativo.

Funzioni potenza ad esponente intero naturale Si sono considerate le funzioni potenza ad esponente naturale

$$p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad p_k : x \mapsto x^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

La funzione p_0 e' la funzione constante $x \mapsto 1$, ed ha per grafico la retta di equazione $y = 1$; la funzione p_1 e' la funzione $x \mapsto x$, ed ha per grafico la retta di equazione $y = x$ (bisettrice del I e III quadrante).

La funzione p_2 e' la funzione $x \mapsto x^2$, ed ha per grafico la parabola di equazione $y = x^2$; si e' data una rappresentazione del suo grafico a partire dalla valutazione di p_2 in alcuni punti la considerazione di questi punti porta a pensare (giustamente) che la funzione p_2 e': crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$, decrescente sull'intervallo $]-\infty, 0]$ (e dunque non monotona su $\mathbb{R}$). Si e' poi motivata in due modi l'affermazione che p_2 e' crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$. [1] Si e' osservato che la funzione p_3 e' strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Lo si provi per sesrcizio.

Si sono rappresentati simultaneamente i grafici di p_0, p_1, p_2, p_3.

Funzioni potenza ad esponente intero negativo. Si sono considerate le funzioni potenza ad esponente intero negativo

$$p_k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad p_k : x \mapsto x^k, \qquad k = -1, -2, -3, \ldots.$$

Si sono considerate le funzioni $p_{-1} : x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$ e $p_{-2} : x \mapsto x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, che hanno per grafico la linea di equazione $y = \frac{1}{x}$ e la linea di equazione $y = \frac{1}{x^2}$. Per esrrcizio, si discuta la loro monotonia.

Funzioni pari, dispari. Si sono ricordate le nozioni di simmetria rispetto ad un punto e rispetto ad una retta, e le rappresentazioni di queste relazioni in coordinate.

---

[1] I modo, usando la definizione; si e' provato che per ogni $0 \leq x_1 < x_2$ si ha $x_1^2 < x_2^2$; il caso cruciale e' quello in cui $0 < x_1 < x_2$; in questo cas0, per le proprieta' che legano l'ordine al prodotto si ha

$$\begin{aligned} x_1 < x_2, \text{ e } x_1 > 0 \quad &\Rightarrow x_1^2 < x_1 x_2 \\ x_1 < x_2, \text{ e } x_2 > 0 \quad &\Rightarrow x_1 x_2 < x_2^2 \end{aligned}$$

e dunque per la transitivita' della realzione d'ordine si ha $x_1^2 < x_2^2$.

II modo, usando la caratterizzazione mediante le pendenze; per ogni $0 \leq x_1 < x_2$ si ha

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 > 0.$$

- Nel piano, due punti P e Q si dicono fra loro simmetrici rispetto ad un punto O (centro di simmetria) se e solo se il punto medio del segmento PQ e' O. Fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ed indentificati i punti del piano con coppie ordinate, si ha che il simmetrico di un punto (x, y) rispetto all'origine e' il punto $(-x, -y)$.

- Nel piano, due punti P, Q si dicono fra loro simmetrici rispetto ad una retta a (asse di simmetria) se e solo se $P = Q \in a$ oppure la retta PQ e' perpendicolare alla retta a, e il punto medio di PQ appartiene ad a. Fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ed indentificati i punti del piano con coppie ordinate, si ha che: il simmetrico di (x, y) rispetto all'asse x e' $(x, -y)$; il simmetrico di (x, y) rispetto all'asse y e' $(-x, y)$; il simmetrico di (x, y) rispetto alla bisettrice del I e III quadrante e' (y, x).

Si e' osservato che: i grafici delle funzioni potenza $p_0 : x \mapsto 1$, $p_2 : x \mapsto x^2$, $p_{-2} : x \mapsto x^{-2}$ sono simmetrici rispetto all'asse y; i grafici delle funzioni potenza $p_1 : x \mapsto x$ e $p_{-1} : x \mapsto x^{-1}$ sono simmetrici rispetto all'origine.

In realta', questi sono fatti generali. Per ciascuna funzione potenza ad esponente pari $p_k : x \mapsto x^k$, si ha $p_k(-x) = (-x)^k = x^k = p_k(x)$; dunque per ciascun $(x, p_k(x)) \in \text{gr}(p_k)$ anche $(-x, p_k(x)) \in \text{gr}(p_k)$, cioe' $\text{gr}(p_k)$ e' simmetrico rispetto all'asse y. Analogamente, per ciascuna funzione potenza ad esponente dispari $p_k : x \mapsto x^k$, si ha che $\text{gr}(p_k)$ e' simmetrico rispetto all'origine. Queste considerazioni suggeriscono la segente definizione.

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un insieme I simmetrico rispetto allo zero, si dice: "pari" se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in I$ o equivalentemente se il suo grafico e' simmetrico rispetto all'asse y; "dispari" se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in I$ o equivalentemente se il suo grafico e' simmetrico rispetto all'origine. Lo studio di una tale funzione pari o dispari si puo' ricondurre allo studio della sua restrizione ad $I \frown \mathbb{R}^+$.

Numeri reali. Radici. Consideriamo l'equazione

$$x^2 = r$$

nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove r e' un numero reale. Se $r < 0$, per le proprieta' generali che legano operazioni ed ordinamento, si ha che l'equazione non ha alcuna soluzione; se $r = 0$, l'equazione ha l'unica soluzione $x = 0$; se $r > 0$ si dimostra che che l'equazione ha esattamente due soluzioni in $\mathbb{R}$, una opposta dell'altra.
Per ogni $r \geq 0$ si pone per definizione

$$\sqrt{r} = \textit{ unica soluzione reale non negativa di } x^2 = r;$$

per $r < 0$ la radice $\sqrt{r}$ non e' definita. In altri termini, sotto la condizione $r \geq 0$, la radice $\sqrt{r}$ e' caratterizzata dalle relazioni

$$\left(\sqrt{r}\right)^2 = r, \qquad \sqrt{r} \geq 0.$$

Consideriamo l'equazione
$$x^3 = r$$
nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove r e' un numero reale. Per ogni r si dimostra che l'equazione ha esattamente una soluzione, dello stesso segno di r.
Per ogni $r \in \mathbb{R}$ si pone per definizione
$$\sqrt[3]{r} = \text{ unica soluzione reale di } x^3 = r.$$
In altri termini, la radice $\sqrt[3]{r}$ e' caratterizzata dalle relazione
$$\left(\sqrt[3]{r}\right)^3 = r.$$
In modo analogo si definiscono le radici successive.

Numeri reali. Potenze ad esponente razionale. Le potenze ad esponente reciproco di un numero naturale si definiscono tramite le radici:
$$\begin{aligned} &r^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}, \qquad (r \geq 0) \\ &r^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{r}, \\ &r^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{r}, \qquad (r \geq 0) \\ &\vdots \end{aligned}$$
Per ogni numero reale r (soddisfacente le dovute condizioni) e per ogni numero razionale $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, la potenza di base r ed esponente $\frac{m}{n}$ e' definita da
$$r^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{r^m} = \left(\sqrt[n]{r}\right)^m.$$
Ad esempio si ha
$$2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$
Le proprieta' delle potenze ad esponente intero relativo continuano a valere per le potenze ad esponente razionale.

Funzioni inverse delle funzioni potenza e funzioni radici. Si e' considerata la funzione potenza seconda
$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p : x \mapsto x^2;$$
si e' osservato che non e' ne' iniettiva ne' suriettiva, e che diventa iniettiva se si restringe il suo dominio a $[0, +\infty[$. Per l'esistenza delle radici quadrate dei numeri reali non negativi, la funzione potenza seconda
$$p : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \qquad p : x \mapsto x^2$$
e' biiettiva, e la sua funzione inversa e' la funzione radice quadrata
$$q : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \qquad q : x \mapsto \sqrt{x}.$$
Si e' osservato che $\mathrm{gr}(q)$ e' il simmetrico di $\mathrm{gr}(p)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrate (che e' il grafico della funzione identica). Questo e' un fatto generale:

Se $f : I \to J$ e' una funzione biiettiva e $f^{-1} : J \to I$ e' la sua funzione inversa, allora gr $\left(f^{-1}\right)$ e' il simmetrico di gr(f) rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

Infatti:

$$(a, b) \in \operatorname{gr}(f) \;\Leftrightarrow\; b = f(a) \;\Leftrightarrow\; a = f^{-1}(b) \;\Leftrightarrow\; (b, a) \in \operatorname{gr}\left(f^{-1}\right).$$

Numeri reali. Potenze ad esponente reale. Per ogni numero reale positivo $r > 0$ e per ogni numero irrazionale s, si puo' definire la potenza r^s di base r ed esponente s. Questa potenza e' sempre un numero reale positivo.

Non diamo la definizione, ma solo un'idea intuitiva su un esempio. La potenza e^π di base $e = 2,718\ldots$ ed esponente $\pi = 3.141\ldots$ si puo' ottenere considerando la successioni dei decimali $2; 2,7; 2,71; 2,718; \ldots$ che approssimano e, la successioni dei decimali $3; 3,1; 3,14; 3,141; \ldots$ che approssimano π, ed usando la corrispondente successione di potenze di numeri razionali ad esponente razionale

$$2^3;\ (2,7)^{3,1};\ (2,71)^{3,14};\ (2,718)^{3,141}; \ldots$$

per definire per approssimazione e^π.
Si dimostra che

le proprieta' delle potenze continuano a valere per le potenze ad esponente reale.

Funzioni esponenziali Sia $b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$, un un numero reale positivo fissato. La funzione che associa ad ogni numero reale x la potenza di b con esponente x si dice "funzione esponenziale di base b" e si indica con $\exp_b$; in simboli:

$$\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_b(x) = b^x.$$

Ciascuna funzione esponenziale trasforma l'operazione di somma nell'operazione di prodotto:

$$\exp_b(x_1 + x_2) = b^{x_1 + x_2} = b^{x_1} b^{x_2} = \exp_b(x_1) \exp_b(x_2), \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Si e' considerata le funzione esponenziale di base 2 $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x$, si e' data una rappresentazione del suo grafico a partire dalla valutazione in alcuni punti; la considerazione di questi punti porta a pensare (giustamente) che la funzione $\exp_2$ e' strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Questa affermazione e' ovvia su $\mathbb{N}$, e' chiara su $\mathbb{Z}$, e si prova che e' vera su $\mathbb{R}$.