Numeri reali. Funzioni reali di variabile reale

Funzioni esponenziali. A partire dai casi $b = 2$ e $b = \frac{1}{2}$, si e' considerata per ciascun $b > 0$ fissato, la funzione esponenziale

$$\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_b : x \mapsto b^x.$$

ciascuna di queste funzioni assume solo valori strettamente positivi. Si e' enunciato che:
- per $b > 1$ la funzione exp_b e' strettamente crescente;
- per $b = 1$ la funzione exp_1 e' costante uguale a 1;
- per $0 < b < 1$ la funzione exp_b e' strettamente descrescente.

(La seconda affermaziione e' ovvia; la prima e la terza sono ovvie su $\mathbb{N}$, chiare su $\mathbb{Z}$, e si possono motivare in modo elementare su $\mathbb{Q}$.)

Logaritmi

Esempio. Consideriamo l'equazione
$2^x = 3$
nell'incognita x in $\mathbb{R}$. Per la monotonia della funzione esponenziale, se l'equazione ha una soluzione in $\mathbb{R}$, questa e' unica. Si prova in modo non banale che una tale soluzione esiste.
Diamo un'idea molto primitiva di come si possa costruire. Consideriamo la disequazione
$2^x \leq 3$
nell'incognita x in $\mathbb{Q}^+$; fra le soluzioni intere ce ne e' una massima ed e' 1; fra le soluzioni con una cifra decimale ce ne e' una massima ed e' $1,1$ (infatti $2^{11/10} < 3$ in quanto $2^{11} < 3^{10}$ mentre $2^{12/10} > 3$ in quanto $2^{12} > 3^{10}$); fra le soluzioni con due cifre decimali ce ne e' una massima ... si ottiene cosi' un numero reale $1,1\ldots$. Si puo' dimostrare che questo numero e' una soluzione dell'equazione data. Si dice che $1,1\ldots$ e' il logaritmo di 3 in base 2 e si scrive

$$\log_2(3) = 1,1\ldots$$

Logaritmi in base 2 Consideriamo ora l'equazione
$2^x = a$
nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove a e' un parametro in $\mathbb{R}$. Per ogni $a \leq 0$ l'equazione data non ha soluzioni. Si prova in modo non banale per ogni $a > 0$ l'equazione ha una ed una sola soluzione; questa soluzione viene detta "logaritmo di a in base 2" e viene indicata con $\log_2(a)$. Dunque per definizione si ha

$$\log_2(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad 2^c = a;$$

in altri termini, $\log_2(a)$ e' caratterizzato dalla condizione

$$2^{\log_2(a)} = a.$$

Logaritmi Consideriamo l'equazione

$$b^x = a$$

nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove a e b sono due parametri in $\mathbb{R}$. Affinche' la potenza b^x sia definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e' necessario che $b > 0$. Osserviamo che per $b = 1$ l'equazione diviene $1^x = a$, che per $a \neq 1$ non ha soluzioni, e per $a = 1$ ha per soluzione ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si prova in modo non banale per ogni $b \in \mathbb{R}$ con $0 < b \neq 1$ ed ogni $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, l'equazione ha una ed una sola soluzione in $\mathbb{R}$; questa soluzione viene detta "logaritmo di a in base b" e viene indicata con $\log_b(a)$. Dunque per definizione si ha

$$\log_b(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = a;$$

in altri termini, $\log_b(a)$ e' caratterizzato dalla condizione

$$b^{\log_b(a)} = a.$$

Dalle proprieta' delle potenze seguono le seguenti proprieta' dei logaritmi

$$\log_b(a_1 a_2) = \log_b(a_1) + \log_b(a_2) \qquad (a_1, a_2 > 0)$$
$$\log_b(a^\alpha) = \alpha \log_b(a) \qquad (a > 0)$$

Proviamo la prima proprieta'. Si ha

$$b^{\log_b(a_1)} = a_1, \qquad b^{\log_b(a_2)} = a_2;$$

moltiplicando membro a membro la seconda e la terza uguaglianza ed usando la prima proprieta' delle potenze si ottiene

$$b^{\log_b(a_1)+\log_b(a_2)} = a_1 a_2,$$

dunque, per la stessa definizione di logaritmo si ha

$$\log_b(a_1 a_2) = \log_b(a_1) + \log_b(a_2).$$

Nella pratica vengono usati logaritmi in base 2, in base 10 e in base e dove $e = 2,718\ldots$ e' il numero di Nepero. Di regola, noi useremo questi ultimi, e scriveremo $\log_e(a)$ semplicemente $\log(a)$.

Per ciascun $b \in \mathbb{R}$, con $0 < b \neq 1$, la funzione

$$\exp_b : \mathbb{R} \to [0, +\infty[, \qquad x \mapsto b^x$$

e' biiettiva ed ha per funzione inversa la funzione logaritmo in base b

$$\log_b : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_b(x).$$

Dai grafici delle funzioni esponenziale, per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, si sono dedotti i grafici delle funzioni logaritmo.

Descriviamo in breve come un tempo per il calcolo venivano usati i logaritmi. Per semplicita' si supponga di dover operare su numeri decimali con un numero finito di cifre dopo la virgola; il calcolo di prodotti (operazione complicata) veniva ricondotto al calcolo di somme (operazione semplice) nel modo seguente. Dati due numeri a e b, si usava una tabulazione della funzione logaritmo per trovare i logaritmi α e β di a e b, si sommavano α e β ottenendo un numero γ, si usava la tabulazione della funzione esponenziale per trovare l'esponenziale c di γ; per le proprieta' delle funzioni mutuamente inverse logaritmo ed esponenziale, si ha $c = ab$.

Funzioni trigonometriche

Ricordiamo informalmente e brevemente la nozione di angolo e di misura di un angolo in radianti nel senso della geometria elementare. Per "angolo" intendiamo una parte di piano α delimitata da due semirette aventi la stessa origine O; su ciascuna circonferenza centrata in O l'angolo α individua un arco; si prova che il quoziente della lunghezza dell'arco sul raggio della circonferenza e' una costante indipendente dalla circonferenza; questa costante viene detta "misura in radianti" dell'angolo α; la misura in radianti di α puo' essere pensata come il numero reale ottenuto considerando la circonferenza di raggio unitario con centro O, l'arco individuato da α su di essa, e prendendo la lunghezza di questo arco. Si ha dunque che l'angolo giro ha per misura in radianti la lunghezza della circonferenza di raggio unitario, cioe' 2π.

Coseno e seno. Descriviamo le funzioni trigonometriche a partire da una movimento periodico che descriviamo informalmente. Consideriamo un punto materiale P che si muove uniformemente su una circonferenza di raggio 1 con centro un punto O, percorrendo in senso antiorario un arco di circonferenza di lunghezza 1 ogni unita' di tempo, e sia P_t il punto in cui il punto materiale P si trova al tempo t. Supponiamo che questo movimento avvenga da sempre e per sempre, cosicche' t vari in tutto $\mathbb{R}$. Essendo la lunghezza della circonferenza 2π, si avra' che

$$P_{t+2\pi} = P_t \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Per valori compresi fra 0 e 2π il numero reale t coincide con la misura in radianti dell'angolo avente per lati le semirette OP_0 e OP_t e contenente i punti P_u con $0 \leq u \leq t$ (P_0 e' il punto occupato dal punto materiale al tempo $t = 0$).

Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale che abbia origine in O, punto untita' dell'asse x coincidente con P_0, e punto untita' dell'asse y coincidente con $P_{\frac{\pi}{2}}$.

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ definiamo il coseno $\cos(t)$ di t come l'ascissa di P_t e definiamo il seno $\sin(t)$ di t come l'ordinata di P_t; in altri termini, indicate con A_t e B_t le proiezioni ortogonali di P_t sull'asse x e sull'asse y, definiamo

$$\cos(t) = OA_t, \quad \sin(t) = OB_t,$$

(qui OA_t indica la misura con segno del segmento orientato di estremi O e A_t; analogo significato ha OB_t).
Dal fatto che il punto P_t sta sempre sulla circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine del sistema di riferimento, e che questa circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = 1$, si ha che

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In particolare, segue che

$$-1 \leq \cos(t) \leq 1, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$
$$-1 \leq \sin(t) \leq 1, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per la scelta del sistema di riferimento e per l'ipotesi sul moto del punto materiale si ha

$$P_0 = (1,0),\ P_{\pi/2} = (0,1),\ P_\pi = (-1,0),\ P_{3\pi/2} = (0,-1),\ P_{2\pi} = (1,0),$$

dunque si hanno i seguenti valori ovvi di coseno e seno

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(t)$	1	0	-1	0	1
$\sin(t)$	0	1	0	-1	0

Funzioni coseno e seno. Periodicita'. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $p \in \mathbb{R}_{>0}$ un numero reale positivo. Diciamo che f e' "periodica di periodo p" se e solo se p e' il minimo numero reale positivo tale che

$$f(x+p) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se una tale funzione e' nota su un intervallo di ampiezza p, allora essa e' nota su tutto $\mathbb{R}$.
La funzione

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x)$$

e' periodica di periodo 2π. Infatti si ha $P_t = P_{t+2\pi}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque si ha pure

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre 2π e' il piu' piccolo numero reale positivo con questa proprieta': se q e' un qualsiasi numero reale con $0 < q < 2\pi$ si ha che esiste un $x \in \mathbb{R}$ tale che $\cos(x + q) \neq \cos(x)$; precisamente, per $x = 0$ si ha $\cos(0 + q) = \cos(q) < 1 = \cos(0)$.
La funzione

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$$

e' periodica di periodo 2π. Infatti si ha $P_t = P_{t+2\pi}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque si ha pure

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre 2π e' il piu' piccolo numero reale positivo con questa proprieta': se q e' un qualsiasi numero reale con $0 < q < 2\pi$ si ha che esiste un $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sin(x+q) \neq \sin(x)$; precisamente, per $x = \pi/2$ si ha $\sin(\pi/2+q) < 1 = \sin(\pi/2)$.

Funzioni arcososeno, arcoseno. La funzione coseno $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non e' ne' iniettiva ne' suriettiva. Si possono pero' restringere opportunamente dominio e codominio della funzione cos, in modo da renderla biunivoca; la funzione inversa si dice funzione "arcocoseno" e si indica con arccos. La restrizione piu' comune e'

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1],$$

alla quale corrisponde

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

La funzione seno $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non e' ne' iniettiva ne' suriettiva. Si possono pero' restringere opportunamente dominio e codominio della funzione sin, in modo da renderla biunivoca; la funzione inversa si dice funzione "arcoseno" e si indica con arcsin. La restrizione piu' comune e'

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],$$

alla quale corrisponde

$$\arcsin : [-1, 1] \to [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}].$$

Tangente. Consideriamo una retta r che ruota uniformemente in senso antiorario attorno ad un suo punto vincolato O in modo che una sua semiretta con origine O descriva un angolo di un radiante ogni unita' di tempo, e sia r_t la retta r al tempo t. Supponiamo che questo movimento avvenga da sempre e per sempre, cosicche' t vari in tutto $\mathbb{R}$. Si avra' che

$$r_{t+\pi} = r_t \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale che abbia origine in O, asse x coincidente con r_0, e asse y coincidente con $r_{\frac{\pi}{2}}$ (orientati in modo coerente con la rotazione di r).

La retta r_t, tranne nei casi in cui sia perpendicolare all'asse x, ha una sua ben definta pendenza; definiamo la tangente $\tan(t)$ di t come la pendenza della retta r_t; in altri termini, considerato il punto unita' U sull'asse x e la retta u passante per U e perpendicolare all'asse x, la retta r_t interseca u in un punto R_t e definiamo la tangente $\tan(t)$ di t ponendo

$$\tan(t) = \frac{UR_t}{OU} = UR_t$$

(qui UR_t indica la misura con segno del segmento orientato di estremi U e R_t, analogamente per OU che dunque vale 1).
Possiamo pensare che la retta r_t sia la retta per il punto O ed il punto P_t che si muove di moto uniforme sulla circonferenza di centro O e raggio 1, percorrendo in senso antiorario un arco di lunghezza 1 ogni unita' di tempo; il sistema di riferimento associato alla rotazione della retta coincide con quello associato alla rotazione del punto. Osserviamo che i triangoli OUR_t e OA_tP_t sono simili e dunque si ha

$$\tan(t) = \frac{UR_t}{OU} = \frac{A_tP_t}{OA_t} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

cosi'

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}, \qquad \forall t \neq \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \ldots$$

Per ogni t_1, t_2 con $-\pi/2 < t_1 < t_2 < \pi/2$ la pendenza della retta r_{t_1} e' minore della pendenza della retta r_{t_2} dunque la funzione tangente e' strettamente crescente sull'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$.

Funzione tangente. La funzione tangente

$$\tan : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan(x),$$

dove $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pi/2 + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$, e' periodica di periodo π.

Composizione di funzioni.

Sia $f : A \to B$ una funzione da un insieme A ad un insieme B; l'insieme delle immagini $f(a)$ degli elementi a di A tramite f si dice "immagine di A" e si indica con $f(A)$; in breve:

$$f(A) = \{f(a);\ a \in A\}.$$

Siano date una prima ed una seconda funzione, tali che l'immagine del dominio della prima sia contenuta nel dominio della seconda

$$f : A \to B, \quad g : C \to D, \qquad (f(A) \subseteq C);$$

a ciascun elemento x in A la funzione f associa l'elemento $f(x)$, l'elemento $f(x)$ sta in C, e a $f(x)$ la funzione g associa l'elemento $g(f(x))$ in D; si ha cosi' una funzione da A a D che viene detta "funzione composta di g dopo f", in breve "g dopo f", e viene indicata con $g \circ f$; dunque

$$g \circ f : \ A \to D, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ad esempio, siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le funzioni date da $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$; allora la funzione $g \circ f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e' data da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

e la funzione $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e' data da

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1.$$