Sistemi lineari

Metodo di eliminazione

Metodo di eliminazione; esempio. Consideriamo il sistema lineare nelle incognite a, b, c, d

$$\begin{cases} 17a + 9b + 5c + 13d = 16 \\ 9a + 5b + 3c + 7d = 8 \\ 5a + 3b + 2c + 4d = 4 \end{cases}$$

(Eliminazione; 1) Scegliamo un'equazione ed una incognita che in essa compare, ed usiamo quella equazione per eliminare quella incognita dalle altre equazioni; ad esempio scegliamo la terza equazione e l'incognita c, e alla prima equazione sommiamo $(-5/2)$ la terza equazione, alla seconda equazione sommiamo $(-3/2)$ la terza equazione, otteniamo

$$\begin{cases} \frac{9}{2}a + \frac{3}{2}b + 3d = 6 \\ \\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + d = 2 \\ \\ 5a + 3b + 2c + 4d = 4 \end{cases}$$

(Eliminazione, 2) La terza equazione e' stata usata. Scegliamo una delle prime due equazioni e una incognita che compare in essa, ed usiamo quella equazione per eliminare quella incognita dalle altre equazioni; ad esempio scegliamo la seconda equazione e l'incognita d, e alla prima equazione sommiamo (-3) la seconda equazione, alla terza equazione sommiamo (-4) la seconda equazione, otteniamo

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + d = 2 \\ \\ -a + b + 2c = -4 \end{cases}$$

(Risoluzione) La prima equazione e' identicamente soddisfatta. L'incognita d compare solo nella seconda equazione, e l'incognita c compare solo nella terza equazione; dalla seconda equazione ricaviamo d in funzione di a, b, dalla terza equazione ricaviamo c in funzione di a, b, e lasciamo libere a, b; otteniamo

$$a = \text{qualsiasi}, \quad b = \text{qualsiasi} \quad c = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2 \quad d = -\frac{3}{2}a - \frac{b}{2} + 2,$$

in altri termini, la soluzione generale e'

$$(a,\ b,\ \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2,\ -\frac{3}{2}a - \frac{b}{2} + 2), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Il sistema e' indeterminato, con soluzioni che dipendono da due variabili libere.

Verifichiamo se questi valori delle incognite soddisfano la prima equazione del sistema dato; nella prima equazione del sistema dato sostituiamo alle incognite c, d la loro espressione in funzione delle a, b; otteniamo

$$17a + 9b + 5(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - 2) + 13(-\frac{3}{2}a - \frac{b}{2} + 2) = 16$$

... si ha che questa equazione e' identicamente soddisfatta, per ogni a, b; la verifica ha dato esito positivo. In modo analogo si possono effettuare le verifiche sulle altre due equazioni del distema dato.

Matrice del sistema; conti sulla matrice Rappresentiamo il sistema lineare nelle incognite a, b, c, d

$$\begin{cases} 17a + 9b + 5c + 13d = 16 \\ 9a + 5b + 3c + 7d = 8 \\ 5a + 3b + 2c + 4d = 4 \end{cases}$$

con la matrice che ha nella prima riga i coefficienti delle incognite a, b, c, d e il termine noto della prima equazione, nella seconda riga i coefficienti delle incognite a, b, c, d e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 17 & 9 & 5 & 13 & 16 \\ 9 & 5 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

(Eliminazione; 1) Scegliamo un elemento non nullo a sinistra del separatore, ed usiamo la sua riga per annullare gli altri elementi della sua colonna; ad esempio scegliamo l'elemento 2 nalla terza riga e terza colonna e alla prima riga sommiamo $(-5/2)$ la terza riga, alla seconda riga sommiamo $(-3/2)$ la terza riga, otteniamo

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 3 & 6 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

(Passo 2) Abbiamo usato la terza riga. Scegliamo un elemento non nullo delle prime due righe a sinistra del separatore, ed usiamo la sua riga per annullare gli altri elementi della sua colonna; ad esempio scegliamo l'elemento 1 nalla seconda riga e quarta colonna e alla prima riga sommiamo (-3) la seconda riga, alla terza riga sommiamo (-4) la seconda riga, otteniamo

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \\ \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + d = 2 \\ \\ -a + b + 2c = -4 \end{cases}$$

Metodo di eliminazione. Consideriamo un sistema di m equazioni lineari nelle n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ (psicologocamente, m ed n abbastanza grandi).

(0) Se in ogni equazione non compare alcuna incognita, allora o il sistema e' impossibile, oppure tutte le n incognite sono libere.
(1) Supponiamo dunque che in qualche equazione compaia qualche incognita. Scegliamo un'equazione eq_{i_1} ed una incognita x_{j_1} che in essa compare, e sommiamo opportuni multipli dell'equazione eq_{i_1} alle altre equazioni per eliminare da esse l'incognita x_{j_1}.
(10) Se in ogni equazione diversa dalla eq_{i_1} non compare alcuna incognita, allora o il sistema e' impossibile, oppure il sistema e' equivalente alla equazione eq_{i_1}; questa equazione si puo' risolvere ricavando l'incognita x_{j_1} in funzione delle altre $n-1$ incognite, che possono essere lasciate libere.
(11) Supponiamo dunque che in qualche equazione diversa da eq_{i_1} compaia qualche incognita. Scegliamo un'equazione eq_{i_2} ed una incognita x_{j_2} che in essa compare, e sommiamo opportuni multipli dell'equazione eq_{i_2} alle altre equazioni per eliminare da esse l'incognita x_{j_2}.
(110) Se in ogni equazione diversa dalle eq_{i_1} e eq_{i_2} non compare alcuna incognita, allora o il sistema e' impossibile, oppure il sistema e' equivalente al sistema delle due equazioni eq_{i_1} e eq_{i_2}; questo sistema si puo' risolvere ricavando da eq_{i_1} e da eq_{i_2} rispettivamente l'incognita x_{j_1} e l'incognita x_{j_2}, in funzione delle altre $n-2$ incognite che possono essere lasciate libere.
...
Cosi' proseguendo, si ottiene che o il sistema e' impossibile, oppure il sistema e' equivalente ad un sistema di m' equazioni $eq_{i_1}, eq_{i_2}, \dots, eq_{i_{m'}}$, caratterizzate dal fatto di essere le uniche a contenere rispettivamente certe incognite $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{m'}}$ (si osservi che $m' \leq m$ e $m' \leq n$).
Questo sistema si puo' risolvere ricavando da ciascuna equazione eq_{i_*} la rispettiva incognita x_{j_*} in funzione delle altre $n - m'$ incognite, e queste $n - m'$ incognite possono essere lasciate libere. Se $m' = n$ il sistema e' determinato; se $m' < n$ il sistema e' determinato.

Sistemi con meno equazioni che incognite Dall'analisi precedente si ha la seguente

Proposizione 1 *Un sistema lineare di m equazioni in n incognite con $m < n$ o e' impossibile o e' indeterminato. In altri termini: un sistema lineare di m equazioni in n incognite con $m < n$ non e' mai determinato.*

Infatti, o il sistema e' impossibile, oppure il sistema e' equivalente ad un sistema di $m' \leq m$ equazioni che si puo' risolvere ricavando certe m' incognite in funzione delle altre $n - m'$ incognite che possono essere lasciate libere. Essendo $m' \leq m < n$, si ha $n - m' > 0$, c'e' dunque almeno una incognita libera, e il sistema e' indeterminato.