Numeri reali. Funzioni reali di variabile reale

Composizione di funzioni.

Per semplicita', da ora in poi fino ad avviso contrario, useremo la seguente nozione di composizione di funzioni (che assume una condizione un po' piu' restrittiva sulle funzioni da comporre). Date due funzioni $f : A \to B$, e $g : B \to C$, la legge

$$a \mapsto g(f(a)),$$

($\forall a \in A$) definisce una funzione $g \circ f : \; A \to C$ detta "funzione composta g dopo f," in breve "g composta f."

La composizione di funzioni e' un'operazione associativa. Infatti, date tre funzioni

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

i due modi per comporle

$$\begin{array}{ll} A \xrightarrow{g\circ f} C \xrightarrow{h} D, & A \xrightarrow{h\circ(g\circ f)} D, \\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h\circ g} D, & A \xrightarrow{(h\circ g)\circ f} D, \end{array}$$

danno la stessa funzione, che viene indicata con $h \circ g \circ f$. Esplicitamente;

$$A \xrightarrow{h\circ g\circ f} D, \qquad (h\circ g\circ f)(a) = h(g(f(a))), \quad \forall a \in A.$$

Le funzioni si possono comporre e scomporre. Ad esempio, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $f(x) = 2^{4x+3} + 1$. Possiamo ottenere il valore di f su un numero reale a nel modo seguente:

(1) al numero reale a associamo il numero reale $b = 4a + 3$;
(2) al numero reale b sopra ottenuto associamo il numero reale $c = 2^b$;
(3) al numero reale c sopra ottenuto associamo il numero reale $d = c + 1$;
Si ha cosi' $f(a) = d$.
In altrin termini, posto

$$\begin{array}{ll} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & g(x) = 4x + 3 \\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & h(x) = 2^x \\ i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & i(x) = x + 1, \end{array}$$

si ha

$$f(x) = 2^{4x+3} + 1 = i(2^{4x+3}) = i(h(4x+3)) = i(h(g(x))) = (i\circ h\circ g)(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

dunque
$$f = i \circ h \circ g.$$
Se una proprieta' delle funzioni e' conservata dalla composizione, allora si puo' provare che una funzione ha quella proprieta' scomponendola in funzioni che hanno quella proprieta'. Ad esempio: la proprieta' di monotonia crescente e' conservata dalla composizione di funzioni; le funzioni g, h, i sono monotone strettamente crescenti (facile); dunque la funzione $f = i \circ h \circ g$ e' monotona strettamente crescente.

Per ogni insieme A, la funzione che manda ogni elemento di A in se' stesso viene detta "identita' su A" e viene indicata con id_A, in simboli:
$$A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A, \quad a \xmapsto{\mathrm{id}_A} a, \quad \forall a \in A.$$
Ad esempio, l'identita' su $\mathbb{R}$ e' la funzione $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$; il grafico $y = x$ di questa funzione e' la retta bisettrice del I e III quadrante.

Le funzioni identita' sono gli elementi neutri dell'operazione di composizione di funzioni, nel senso che per ogni funzione $f : A \to B$ si ha
$$\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A.$$

Per ciascuna funzione invertibile $f : A \to B$ la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ e' caratterizzata dalle uguaglianze
$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B;$$
$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in A.$$
Le prime uguaglianze possono essere riscritte
$$(f \circ f^{-1})(y) = \mathrm{id}_B(y), \qquad \forall y \in B,$$
le seconde uguaglianze possono essere riscritte
$$(f^{-1} \circ f)(x) = \mathrm{id}_A(x), \qquad \forall x \in A.$$
Queste uguaglianze si possono sintetizzare come
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A.$$
Ad esempio, per ciascun $0 < b \neq 1$, la funzione esponenziale $\exp_b : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ha come funzione inversa la funzione logaritmo $\log_b \, :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$; valgono le uguaglianze
$$b^{\log_b(y)} = y, \quad \forall y \in]0, +\infty[; \qquad \log_b(b^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$
queste uguaglianze possono essere sinteticamente riscritte
$$\exp_b \circ \log_b = \mathrm{id}_{]0,+\infty[}, \qquad \log_b \circ \exp_b = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}.$$

Operazioni aritmetiche sulle funzioni. Le operazioni sui numeri reali (somma (e sottrazione), prodotto (e divisione per un numero non nullo)) inducono delle operazioni sulle funzioni a valori reali (somma (e sottrazione), prodotto (e divisione per una funzione, con i dovuti accorgimenti)); queste operazioni sulle funzioni sono definite "punto a punto".

Per due qualsiasi funzioni
$$f, g : A \to \mathbb{R}$$
definiamo la funzione somma e la funzione sottrazione ponendo
$$\begin{array}{ll} f+g : A \to \mathbb{R}, & (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in A \\ f-g : A \to \mathbb{R}, & (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in A. \end{array}$$
E' utile sviluppare un minimo di sensibilita' per immaginare il grafico della funzione somma a partire di grafici delle funzioni addendi. A questo scopo si sono rappresentati i grafici delle funzioni
$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \quad g(x) = 2^x$$
e della loro funzione somma
$$f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = x + 2^x.$$
Definiamo la funzione prodotto $r \cdot f$ di un qualsiasi numero reale $r \in \mathbb{R}$ per una qualsiasi funzione
$$f : A \to \mathbb{R}$$
ponendo
$$r \cdot f : A \to \mathbb{R}, \qquad (r \cdot f)(x) = rf(x), \quad \forall x \in A.$$
Spesso $r \cdot f$ si scrive brevemente rf. E' utile sviluppare un minimo di sensibilita' per immaginare il grafico delle varie funzioni rf a partire dal grafico della funzione f. A questo scopo si rappresentati il grafico della funzione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$
e delle funzioni
$$a \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a \cdot f)(x) = ax^2$$
per alcuni valori di $a \in \mathbb{R}$.

Per due qualsiasi funzioni
$$f, g : A \to \mathbb{R}$$
definiamo la funzione prodotto e la funzione quoziente ponendo
$$\begin{array}{ll} fg : A \to \mathbb{R}, & (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in A \\ \dfrac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}, & (\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in A'. \end{array}$$

Qui sopra A' e' l'insieme dei punti nei quali la funzione g non si annulla:

$$A' = \{x \in A : \ g(x) \neq 0\}.$$

E' utile sviluppare un minimo di sensibilita' per immaginare il grafico della funzione prodotto a partire di grafici delle funzioni fattori. Per esercizio si rappresentino i grafici delle funzioni

$$f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin(\pi x)$$

e della loro funzione prodotto

$$fg : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad (fg)(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}.$$

Funzioni elementari Per "funzione elementare" intendiamo una funzione ottenibile a partire da (un numero finito di) funzioni

-costanti,

-potenza (a esponente intero, intero relativo, razionale, reale)

-esponenziali, logaritmiche,

-trigonometriche (seno, coseno, tangente, ...)

mediante (un numero finito di) operazioni di

-composizione,

-somma (sottrazione), prodotto (divisione).

Le piu' semplici funzioni elementari sono le funzioni polinomiali

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i.$$

Vedremo come lo studio dell'andamento di una funzione (elementare o meno, ma abbastanza buona) nelle vicinanze di un punto possa essere effettuato approssimando la funzione nelle vicinanze del punto con certi polinomi; per molte questioni bastera' approssimare con polinomi di grado al piu' uno, al massimo due; i coefficienti di questi polinomi saranno forniti dalle "derivate" della funzione nel punto; il concetto di derivata e' basato sul concetto di "limite".

Ricordiamo che:

(1) il grafico di una funzione polinomiale di grado al piu' uno

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = ax + b$$

e′ una retta, la retta di pendenza a che taglia l'asse y nel punto $(0, b)$;

(2) il grafico di una funzione polinomiale di grado due

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad q(x) = ax^2 + bx + c, \qquad (a \neq 0)$$

e′ una parabola con l'asse parallelo all'asse y, avente concavita′ rivolta verso l'alto o il basso secondo che a sia maggiore o minore di zero.

Mostriamo di seguito un modo per riscrivere un polinomio di secondo grado in una forma che ne metta in evidenza le salienti proprieta′; questo modo consiste nel ″completare il quadrato″; e′ all'origine della ben nota formula per la risoluzione delle equazioni di II grado. Descriviamo questo modo di riscrittura su un esempio.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 + 4x + 1 \\ &= 3(x^2 + \frac{4}{3}x) + 1 \\ &= 3(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}) + 1 \\ &= 3(x + \frac{2}{3})^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La scrittura di sopra mette in evidenza che

$$\begin{aligned} p(x) &\geq -\frac{1}{3}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \\ p(x) &= -\frac{1}{3}, \quad \text{se e solo se} \quad x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Queste proprieta′ della funzione si riflettono nel fatto che il suo grafico e′ una parabola con concavita′ rivolta verso l'alto ed avente vertice nel punto $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Valore assoluto Per parlare di vicinanza fra punti della retta reale conviene passare attraverso la nozione di distanza fra due punti, e per descrivere la distanza fra due punti conviene usare il valore assoluto.

Ricordiamo che il valore assoluto di un numero reale e′ il numero reale stesso o il suo opposto secondo che il numero sia maggiore-uguale o minore-uguale di zero; il valore assoluto di un numero reale r si incica con $|r|$. In simboli:

$$|r| = \begin{cases} r & \text{se } r \geq 0 \\ -r & \text{se } r \leq 0. \end{cases}$$

La funzione valore assoluto si comporta abbastanza bene rispetto alle operazioni sui numeri reali:

$$\begin{aligned} |a + b| &\leq |a| + |b|, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \\ |a + b| &= |a| + |b| \quad \text{se e solo se } a, b \text{ sono concordi} \\ |ab| &= |a||b|, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$