Spazi vettoriali

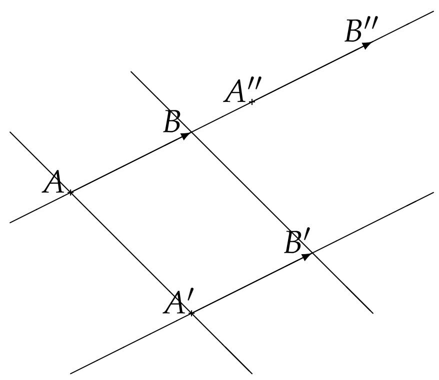
Vettori geometrici. Spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$. Spazi vettoriali.

Piano vettoriale geometrico $\mathcal{G}^2$ Il contesto del discorso che svolgiamo in questa parte e' il piano della geometria elementare, lo stile e' informale.

Col termine "segmento orientato" intendiamo un segmento per il quale e' stato scelto un ordine fra i suoi due estremi; rappresentiamo ciascun segmento orientato con un freccia dal suo primo estremo al suo secondo estremo; il primo estremo si dice "origine" e il secondo estremo si dice "termine" del segmento orientato; indichiamo con AB e il segmento orientato che ha origine A e termine B.

Diciamo che due segmenti orientati non ridotti ad un punto sono "equivalenti" se e solo se hanno la stessa direzione, lo stesso verso, la e stessa lunghezza; diciamo che i segmenti orientati ridotti a un punto sono tutti fra loro equivalenti. Osserviamo che

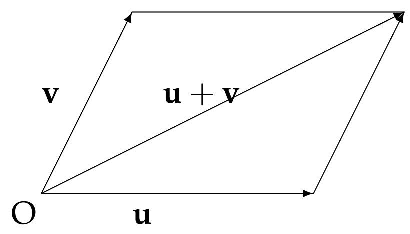
> Comunque siano dati un segmento orientato AB ed un punto A', esiste uno ed un solo segmento orientato $A'B'$ con origine in A' equivalente ad AB. (In generale, B' e' il quarto vertice del parallelogramma che ha per lati AB e AA')



Col termine "vettore geometrico", in breve "vettore", intendiamo un oggetto rappresentato da un segmento orientato; con la convenzione che due segmenti orientati rappresentano lo stesso vettore se e solo se sono equivalenti; chiamiamo "vettore nullo" l'oggetto rappresentato dai segmenti orientati ridotti a un punto. Indchiamo i vettori con lettere minuscole in grassetto come $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$, indichiamo il vettore nullo con $\mathbf{0}$, e indichiamo l'insieme dei vettori del piano con $\mathcal{G}^2$.

Fissato un punto O del piano, si ha che ciascun vettore del piano e' rappresentato da uno ed un solo segmento orientato con origine in O; si puo' dunque identificare l'insieme $\mathcal{G}^2$ dei vettori del piano con l'insieme dei segmenti orientati con origine in O. Cosi' di regola faremo.

Dati due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}^2$, definiamo il vettore somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ come il vettore ottenuto considerando il parallelogramma che ammette $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ come lati, e prendendo la diagonale uscente da O:



Questa operazione di addizione di vettori risulta essere commutativa e associativa:

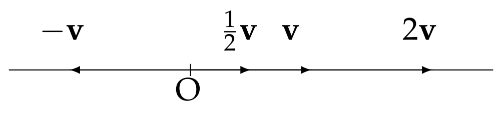
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{G}^2$. Il ruolo del numero zero viene svolto dal vettore nullo $\mathbf{0}$. La somma di un qualsiasi vettore col vettore suo simmetrico rispetto ad O ha per risultato il vettore nullo; cosi', per ogni $\mathbf{v}$, il suo simmetrico rispetto ad O viene indicato con $-\mathbf{v}$.

C'e' un modo naturale per definire il prodotto di un numero reale per un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{G}^2$: per un numero intero relativo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, si pone

$$nv = \begin{cases} \mathbf{v} + \quad \mathbf{v} + \cdots + \quad \mathbf{v} & n \text{ volte} & \text{per } n > 0 \\ 0 & & \text{per } n = 0 \\ (-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) + \cdots + (-\mathbf{v}) & -n \text{ volte} & \text{per } n < 0 \end{cases}$$

... poi si passa, possiamo dire "per suddivisione" , al caso dei numeri razionali, e infine, possiamo dire "per continuita'" ai reali.



Abbiamo cosi' definito due operazioni: l'addizione di due vettori, che fornisce un vettore, e la moltiplicazione di un numero reale per un vettore, che fornisce ancora un vettore. Queste operazioni sono legate dalle proprieta'

$$\begin{aligned} r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= r\mathbf{u} + r\mathbf{v}, \\ (r + s)\mathbf{v} &= r\mathbf{v} + s\mathbf{v}, \\ (rs)\mathbf{v} &= r(s\mathbf{v}), \\ 1\mathbf{v} &= \mathbf{v}, \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}^2$ ed $r, s \in \mathbb{R}$. Il calcolo con queste due operazioni gode cosi' delle usuali proprieta' del calcolo letterale; bisogna solo tenere presente che abbiamo oggetti di due tipi: vettori e numeri reali; possiamo sommare vettori con vettori, moltiplicare vettori per numeri, ma non possiamo sommare vettori con numeri, ne' moltiplicare vettori per vettori.
L'insieme $\mathcal{G}^2$, munito di queste operazioni, viene detto *piano vettoriale geometrico*.

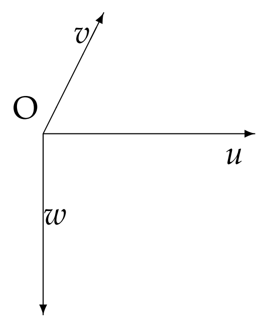
Dato un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{G}^2$ diverso da $\mathbf{0}$, osserviamo che: esiste una ed una sola retta che contiene $\mathbf{u}$; ciascun vettore $r\mathbf{u}$ ($r \in \mathbb{R}$) sta su questa retta; ogni vettore che sta su questa retta si ottiene in questo modo, in corrispondenza di un'unico numero reale r. In altri termini, si ha che per due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}^2$ le seguenti proposizioni sono equivalenti

- $\mathbf{u}$ non e' ridotto a un punto e $\mathbf{v}$ sta sulla retta contenente $\mathbf{u}$;
- $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ed esiste uno (ed un solo) $r \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v} = r\mathbf{u}$.

Dati due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}^2$ che non stanno su una stessa retta, osserviamo che

> ogni vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{G}^2$ si puo' scrivere come
>
> $$\mathbf{w} = r\mathbf{u} + s\mathbf{v},$$
>
> in corrispondenza di un'unica coppia $(r, s) \in \mathbb{R}^2$.

Infatti: (1) proiettando $\mathbf{w}$ sulla retta di $\mathbf{u}$ parallelamente al vettore $\mathbf{v}$ si ottiene un vettore del tipo $r\mathbf{u}$, in corrispondenza di un'unico $r \in \mathbb{R}$; (2) proiettando $\mathbf{w}$ sulla retta di $\mathbf{v}$ parallelamente al vettore $\mathbf{u}$ si ottiene un vettore del tipo $s\mathbf{v}$, in corrispondenza di un'unico $s \in \mathbb{R}$; (3) e si ha $w = r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$.



Spazio vettoriale geometrico $\mathcal{G}^3$ Nel contesto dello spazio della geometria elementare, analogamente a quanto fatto sopra nel contesto del piano :
-si danno allo stesso modo le nozioni di "segmento orientato", di "equivalenza" di segmenti orientati, e di "vettore geometrico" in breve "vettore"; si indica con

$\mathcal{G}^3$ l'insieme dei vettori dello spazio; si identifica $\mathcal{G}^3$ con l'insieme dei segmenti orientati con origine in un punto fissato O;

-si definscono allo stesso modo le operazioni di somma di vettori e di prodotto di numeri reali per vettori.

Le proprieta' di queste operazioni sui vettori dello spazio sono le stesse proprieta' delle operazioni sui vettori del piano.

L'insieme $\mathcal{G}^3$, munito di queste operazioni, viene detto *spazio vettoriale geometrico*.

Dati due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{G}^3$ che non stanno su una stessa retta, osserviamo che:
-esiste uno ed un solo piano che contiene $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
-ciascun vettore $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ ($(r, s) \in \mathbb{R}^2$) sta su questo piano; infatti: i vettori $r\mathbf{u}$ ed $s\mathbf{v}$ stanno sul piano, il parallelogramma da essi individuato sta sul piano, ed $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ e' una diagoinale del parallelogramma;
-ogni vettore che sta su questo piano si ottiene in questo modo, in corrispondenza di un'unica coppia $(r, s) \in \mathbb{R}^2$.
In altri termini, si ha che per tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{G}^3$ le seguenti proposizioni sono equivalenti

- $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non stanno su una stessa retta, e $\mathbf{w}$ sta sul piano contenente $\mathbf{u}, \mathbf{v}$;
- non esiste un $r \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$, non esiste un $r \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v} = r\mathbf{u}$, ed esiste una (ed una sola) coppia $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\mathbf{w} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

Dati tre vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathcal{G}^3$ che non stanno su uno stesso piano, osserviamo che

> ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{G}^3$ si puo' scrivere come
> $$\mathbf{v} = r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + r_3\mathbf{u}_3,$$
> in corrispondenza di un'unica terna $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$.

Infatti: (1) proiettando $\mathbf{v}$ sul piano di $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_1$ parallelamente alla retta del vettore $\mathbf{u}_3$ si ottiene un vettore del tipo $r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2$, in corrispondenza di un'unica $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$; (2) proiettando $\mathbf{v}$ sulla retta di $\mathbf{u}_3$ parallelamente al piano dei vettori $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ si ottiene un vettore del tipo $r_3\mathbf{u}_3$, in corrispondenza di un'unico $r_3 \in \mathbb{R}$; (3) e si ha $\mathbf{v} = r_1\mathbf{u}_1 + r_2\mathbf{u}_2 + r_3\mathbf{u}_3$.

Spazio vettoriale $n-$dimensionale standard $\mathbb{R}^n$. Sia n un intero positivo fissato. Consideriamo l'inisieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad u_i \in \mathbb{R}.$$

Al posto di "$n-$pla ordinata di numeri reali" diremo "vettore ad n componenti reali", in breve "vettore".

-Somma di vettori. Per ogni due vettori di $\mathbb{R}^n$, sommando le componenti che occupano lo stesso posto si ottiene un vettore di $\mathbb{R}^n$ che si dice vettore somma dei due vettori dati. In simboli, per ogni due vettori $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ si definisce il vettore somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ponendo

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n).$$

L'operazione di somma di vettori di $\mathbb{R}^n$ eredita dall'operazione di somma di numeri in $\mathbb{R}$ le proprieta' associativa e commutativa:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), \\
&\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}
\end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Il vettore $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ si dice "vettore nullo" di $\mathbb{R}^n$; esso svolge per la somma di vettori il ruolo dello zero, nel senso che

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Per ogni vettore di $\mathbb{R}^n$, cambiando segno ad ogni componente si ottiene un vettore di $\mathbb{R}^n$, che si dice "vettore opposto" del vettore dato; in simboli, per ogni vettore $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ si definisce il vettore opposto $-\mathbf{v}$ ponendo $-\mathbf{v} = (-v_1, \ldots, -v_n)$. Questo vettore e' caratterizzato dalla relazione

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

-Prodotto di numeri reali per vettori. Dati un numero reale ed un vettore in $\mathbb{R}^n$, moltiplicando il numero per ciascuna componente del vettore, si ottiene una vettore in $\mathbb{R}^n$ che si dice prodotto del numero per il vettore. In simboli, si definisce il prodotto $r\mathbf{v}$ di $r \in \mathbb{R}$ per il vettore $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ ponendo

$$r\mathbf{u} = (ru_1, \ldots, ru_n).$$

Il numero 1 ha la proprieta'

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

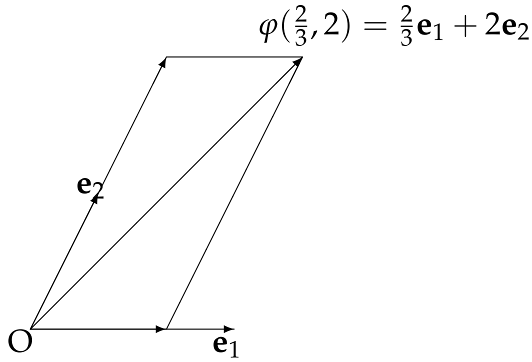
-Proprieta' che legano le operazioni. Le proprieta' distributive del prodotto di numeri reali rispetto alla somma di numeri reali e la proprieta' associativa del prodotto di numeri reali implicano le seguenti proprieta'

$$\begin{aligned}
&r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v} \\
&(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u} \\
&(rs)\mathbf{u} = r(s\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{R}^n$ munito delle operazioni di somma vettori e di prodotto di numeri reali per vettori, si dice *spazio vettoriale reale $n-$dimensionale standard*.

Identificazione di $\mathbb{R}^2$ con $\mathcal{G}^2$. Scelti nel piano due vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathcal{G}^2$ che non stanno su una stessa retta, consideriamo la funzione

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{G}^2,$$
$$\varphi : (r_1, r_2) \mapsto r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2.$$



Per quanto visto in precedenza, la funzione φ e' biunivoca; si ha dunque una funzione inversa

$$\psi : \mathcal{G}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$\psi : \mathbf{v} \mapsto (r_1, r_2) \text{ se e solo se } r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}.$$

Queste biiezioni sono compatibili con le operazioni presenti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{G}^2$; ad esempio

$$\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2,$$
$$\varphi(r\mathbf{u}) = r\varphi(\mathbf{u}), \qquad \forall r \in \mathbb{R},\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2.$$

Verifichiamo la prima proprieta'; da una parte si ha

$$\varphi((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = \varphi((u_1 + v_1, u_2 + v_2)) = (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2;$$

dal'altra parte si ha

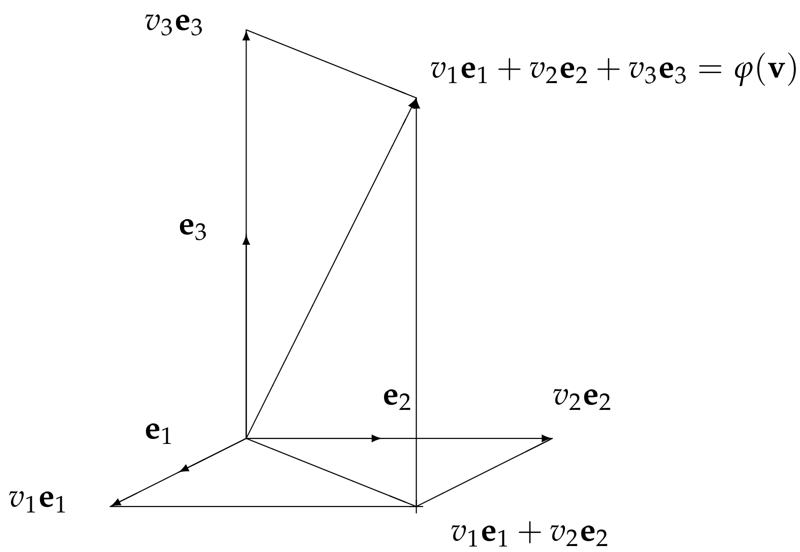
$$\varphi((u_1, u_2)) + \varphi((v_1, v_2)) = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2;$$

e i due risultati sono uguali per le proprieta' delle operazioni in $\mathcal{G}^2$.

Si noti che: $\varphi(0, 0) = \mathbf{0}$, $\varphi(1, 0) = \mathbf{e}_1$, $\varphi(0, 1) = \mathbf{e}_2$. Si ha che φ e' l'unica funzione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{G}^2$ che assume questi valori ed e' compatibile con le operazioni presenti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{G}^2$.

Identificazione di $\mathbb{R}^3$ con $\mathcal{G}^3$. Scelti nello spazio tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathcal{G}^3$ che non stanno su uno stesso piano, consideriamo la funzione

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{G}^3,$$
$$\varphi : (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$



Per quanto visto in precedenza, la funzione φ e' biunivoca; si ha dunque una funzione inversa

$$\psi : \mathcal{G}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\psi : \mathbf{v} \mapsto (v_1, v_2, v_3) \text{ se e solo se } v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}.$$

Queste biiezioni sono compatibili con le operazioni presenti in $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{G}^2$; ad esempio

$$\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$$
$$\varphi(r\mathbf{u}) = r\varphi(\mathbf{u}), \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Si noti che: $\varphi(0,0,0) = \mathbf{0}$, $\varphi(1,0,0) = \mathbf{e}_1$, $\varphi(0,1,0) = \mathbf{e}_2$, $\varphi(0,0,01) = \mathbf{e}_3$. Si ha che φ e' l'unica funzione da $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{G}^3$ che assume questi valori ed e' compatibile con le operazioni presenti in $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{G}^3$.

Spazi vettoriali Gli esempi precedenti suggeriscono la seguente

Definizione 1 *Uno spazio vettoriale reale e' una struttura costituita da:*
-un insieme V di elementi, formalmente detti "vettori" ed indicati con simboli come $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$;
-un'operazione di somma di vettori $V \times V \to V$, indicata con l'usuale simbolo $+$;
-un'operazione di moltiplicazione di numeri reali, in breve "scalari", per vettori $\mathbb{R} \times V \to V$, indicata con la giustapposizione;
tali che:
-l'operazione di somma sia commutativa e associativa;

-esista in V un "vettore nullo" indicato con $\mathbf{0}$, caratterizzato dalla proprieta'

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \qquad \forall \mathbf{v} \in V;$$

-per ogni vettore $\mathbf{v}$ in V esista in V un "vettore opposto" indicato con $-\mathbf{v}$, caratterizzato dalla proprieta'

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0};$$

-le diverse operazioni presenti nella struttura siano legate dalle proprieta'

$$\begin{aligned}
&r(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v} \\
&(r+s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u} \\
&(rs)\mathbf{u} = r(s\mathbf{u}), \\
&1\mathbf{u} = \mathbf{u},
\end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $r, s \in \mathbb{R}$.

Sono dunque esempi di spazi vettoriali il piano vettoriale geometrico $\mathcal{G}^2$, lo spazio vettoriale geometrico $\mathcal{G}^3$, e gli spazi vettoriali $n-$dimensionali standard $\mathbb{R}^n$.
Un altro tipo di esempi. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme fissato. L'insieme

$$\{f;\ f : A \to \mathbb{R}\}$$

delle funzioni da A ad $\mathbb{R}$, munito delle usuali operazioni di somma di funzioni e di prodotto di un numero reale per una funzione, e' unno spazio vettoriale reale.

Combinazioni lineari. Sia V uno spazio vettoriale. Data una sequenza di un certo numero di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ in V ed una sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, \ldots, r_m$ in $\mathbb{R}$, moltiplicando ciascun scalare per il corrispondente vettore e poi sommando otteniamo un nuovo vettore

$$r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m$$

in V, detto *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ con coefficienti $r_1, \ldots, r_m$.

Usando la nozione di combinazione lineare, si possono esprimere in modo piu' sintetico molte delle cose dette in precedenza. Un esempio:

Per tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ nello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{G}^3$, tali che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non stiano su una stessa retta, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) $\mathbf{w}$ sta sull'unico piano che contiene $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;

(2) $\mathbf{w}$ si puo' ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Problema. Fissati nello spazio tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ che non stanno su uno stesso piano, consideriamo i vettori

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{w} = 7\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3.$$

Ci chiediamo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ stanno su una stessa retta e, in caso negativo, se $\mathbf{w}$ sta sull'unico piano che contiene $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Per quanto visto in precedenza, questo problema si puo' formulare nel modo segiente. Ci chiediamo se c'e' uno fra i due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ che e' multiplo scalare dell'altro, e in caso negativo se il vettore $\mathbf{w}$ e' combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Usando i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ per identificare lo spazio vettoriale geometrico $\mathcal{G}^3$ con lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^3$, possiamo formulare il problema nel modo seguente. Ci chiediamo:

esiste un $r\mathbb{R}$ tale che $((3,4,5) = r(2,3,4)$?

esiste un $s \in \mathbb{R}$ tale che $(2,3,4) = s(3,4,5)$?

La risposta ad entrambe le domande e' negativa.

Esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che

$$(7,8,9) = r(3,4,5) + s(2,3,4)?$$

Svolgendo i conti si ha

$$(7,8,9) = (3r + 2s, 4r + 3s, 5r + 4s)$$

ed eguagliando le componenti si ha il sistema lineare

$$\begin{cases} 3r + 2s = 7 \\ 4r + 3s = 8 \\ 5r + 4s = 9 \end{cases}$$

Si lascia al lettore il compito di concludere l'esercizio.