Funzioni reali di variabile reale

Equazioni e disequazioni.

In questa parte ricordiamo per completezza le prime nozioni e i primi principi sulle equazioni e disequazioni: sono le stesse nozioni e principi familiari al lettore dagli studi superiori; l'unica cosa forse nuova consiste nell'interpretazione funzionale di equazioi e disequazioni, e nel ruolo delle funzioni iniettive e monotone per la risoluzione.

Equazioni. Principi generali. Le equazioni che considereremo sono equazioni in una incognita x del tipo $f(x) = g(x)$ dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nella x che assumono valori reali per valori reali della x; una soluzione dell'equazione e' un valore reale dell'incognita x per il quale i due membri dell'equazione sono definiti ed uguali; indicati con A e B gli insiemi dei valori della x per i quali le espressioni $f(x)$ e $g(x)$ sono definite, le soluzioni dell'equazione si cercano nell'insieme $A \frown B$.

Le seguenti operazioni lasciano invariato l'insieme delle soluzioni di un'equazione: (1) sommare ad entrambe i membri una stessa espressione; (2) moltiplicare entrambe i membri per una stessa espressione, a patto che l'espressione non si annulli per alcun valore della x; Usando la prima operazione, ogni equazione nell'incognita x si puo' ricondurre alla forma $h(x) = 0$. Per ciascuna fattorizzazione $h(x) = k_1(x) \cdots k_m(x)$ si ha che l'insieme delle soluzioni dell'equazione $h(x) = 0$ e' uguale all'unione degli insiemi delle soluzioni delle equazioni $k_1(x) = 0$ ... $k_m(x) = 0$.

In ciascuna equazione $f(x) = g(x)$ nell'incognita x, si puo' identificare l'espressione $f(x)$ con una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (dove A e' l'insieme dei valori della x per i quali $f(x)$ e' definita) e si puo' identificare l'espressione $g(x)$ con una funzione $g : B \to \mathbb{R}$, (dove B e' l'insieme dei valori della x per i quali $g(x)$ e' definita). Una soluzione dell'equazione si puo' allora interpretare come un elemento di $A \frown B$ sul quale le funzioni f e g assumono lo stesso valore. Se $h : C \to \mathbb{R}$ e' una funzione che possa essere composta sia dopo f che dopo g, allora: (1) l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$ e' contenuto nell'insieme delle soluzioni dell'equazione $h(f(x)) = h(g(x))$; (2) se la funzione h e' iniettiva, allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$ e' uguale all'insieme delle soluzioni dell'equazione $h(f(x)) = h(g(x))$.

Disequazioni. Principi generali. Le disequazioni che considereremo sono disequazioni in una incognita x del tipo $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) < g(x)$, dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nella x che assumono valori reali per valori reali della x; una soluzione della disequazione e' un valore reale dell'incognita x per il quale i due membri della disequazione sono definiti e stanno nella relazione d'ordine prescritta; indicati con A e B gli insiemi dei valori della x per i quali le espressioni $f(x)$ e $g(x)$ sono definite, le soluzioni della disequazione si cercano nell'insieme $A \frown B$.

Gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni $f(x) > g(x)$ e $f(x) \leq g(x)$ sono l'uno il complementare dell'altro nell'insieme $A \frown B$; analogamente per le disequazioni $f(x) \geq g(x)$ e $f(x) < g(x)$. Di seguito ci limitiamo a considerare le disequazioni col segno di maggiore o minore stretto.

Due disequazioni si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme delle soluzioni. Si ha: (1) per ogni espressione $h(x)$, la disequazione $f(x) > g(x)$ e' equivalente alla disequazione $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$; (2) per ogni espressione $h(x)$, che assuma valori strettamente positivi per ogni valore della x, la disequazione $f(x) > g(x)$ e' equivalente alla disequazione $f(x)h(x) > g(x)h(x)$; (3) per ogni espressione $h(x)$, che assuma valori strettamente negativi per ogni valore della x, la disequazione $f(x) > g(x)$ e' equivalente alla disequazione $f(x)h(x) < g(x)h(x)$. Usando queste operazioni, ogni disequazione stretta nell'incognita x si puo' ricondurre alla forma $h(x) > 0$. Per ciascuna fattorizzazione $h(x) = k_1(x) \cdots k_m(x)$ si ha che la lo sudio del segno di $h(x)$ si puo' ricondurre allo studio del segno dei fattori $k_1(x)$, ... $k_m(x)$.

In ciascuna disequazione $f(x) > g(x)$ nell'incognita x, si puo' identificare l'espressione $f(x)$ con una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (dove A e' l'insieme dei valori della x per i quali $f(x)$ e' definita) e si puo' identificare l'espressione $g(x)$ con una funzione $g : B \to \mathbb{R}$, (dove B e' l'insieme dei valori della x per i quali $g(x)$ e' definita). Una soluzione della disequazione si puo' allora interpretare come un elemento di $A \frown B$ sul quale la funzione f assume un valore maggiore del valore della funzione g. Se $h : C \to \mathbb{R}$ e' una funzione che possa essere composta sia dopo f che dopo g, allora: (1) per h strettamente monotona crescente, la disequazione $f(x) > g(x)$ e' equivalente alla disequazione $h(f(x)) > h(g(x))$; (2) per h strettamente monotona decrescente, la disequazione $f(x) > g(x)$ e' equivalente alla disequazione $h(f(x)) < h(g(x))$.

Equazioni algebriche Un'equazione nell'incognita x si dice algebrica se e' del tipo $r(x) = q(x)$, dove $r(x)$ e $q(x)$ sono polinomi nella x; una tale equazione e' equivalente ad una del tipo $p(x) = 0$, dove $p(x)$ e' un polinomio nella x; il grado dell'equazione data e' il grado di questo polinomio $p(x)$. In altri termini, un'equazione algebrica di grado n nell'incognita x e' un'equazione del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i = 0,$$

dove $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ e $c_n \neq 0$. Per il Teorema di Ruffini, si ha che una tale equazione ha al piu' n soluzioni.

Le equazioni algebriche di grado n pari del tipo $x^n = a$, non hanno soluzioni per $a < 0$; hanno due soluzioni reali coincidenti in $x = 0$ per $a = 0$; ed hanno due soluzioni reali distinte $x_1 = -\sqrt[n]{a}$, e $x_2 = \sqrt[n]{a}$, per $a > 0$.

Le equazioni algebriche di grado n dispari del tipo $x^n = a$, hanno una ed una sola soluzione $x = \sqrt[n]{a}$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Si suppone che il lettore abbia familiarita' con le equazioni di I e II grado

$$ax + b = 0, \qquad (a \neq 0)$$
$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (a \neq 0)$$

Talvolta si puo' ricondurre la risoluzione di un'equazione algebrica di grado maggiore di 2 alla risoluzione di equazioni di grado minore o uguale a due.

Osservazione Sia $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}$ di grado $n > 0$; se $r \in \mathbb{Z}$ e' una radice di $p(x)$ allora r divide a_0. (Infatti, se $r \in \mathbb{R}$ e' una radice di $p(x)$ allora per il Teorema di Ruffini, si ha che $p(x)$ si puo' fattorizzare come prodotto $p(x) = (x-r)q(x)$ di $x - r$ per un polinomio $q(x)$ di grado $n-1$. Indicato con b_0 il termine costante di $q(x)$ si ha che $a_0 = -rb_0$. Nel caso in cui il polinomio $p(x)$ abbia coefficienti in $\mathbb{Z}$ e che $r \in Z$, si ha che anche il polinomio $q(x)$ ha coefficienti in $\mathbb{Z}$ e dunque dalla $a_0 = -rb_0$ si ricava che r divide a_0.)

Esempio. Consideriamo l'equazione

$$p(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0.$$

Ci chiediamo se il polinomio $p(x)$ ha una radice in $\mathbb{Z}$; se esiste, una tale radice deve essere un divisore di -30; ci chiediamo dunque se $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6$ sono radici del polinomio; si ha: $p(1) = -8$, $p(-1) = -72$, $p(2) = 0$. Dunque $p(x)$ e' divisibile per $x - 2$, e usando la regola di Ruffini si trova

$$p(x) = (x-2)(x^2 - 8x + 15).$$

Le soluzioni dell'equazione sono dunque $x_1 = 2$ e le soluzioni dell'equazione di II grado $x^2 - 8x + 15 = 0$, che a sua volta sono $x_2 = 3$ e $x_3 = 5$. In definitiva, l'insieme delle soluzioni e' $\{2, 3, 5\}$.

Le equazioni razionali fratte nell'incognita x, cioe' le equazioni riconducibili alla forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

con $p(x), q(x)$ polinomi in x e $q(x)$ diverso dal polinomio identicamente nullo, si riducono a equazioni algebriche: le soluzioni della equazione di sopra sono le soluzioni dell'equazione algebrica $p(x) = 0$ che soddisfano la condizione $q(x) \neq 0$. Di seguito consideriamo alcuni esempi di altri tipi di equazioni: esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, irrazionali, con valore assoluto.

Esempio. Consideriamo l'equazione $2^{3x+4} = 5$.
Essendo la funzione $\log_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ iniettiva ed essendo entrambe i membri in $]0, +\infty[$ per ogni x, si ha

$$2^{3x+4} = 5 \quad \text{equivalente a} \quad \log_2(2^{3x+4}) = \log_2(5)$$
$$\text{cioe'} \quad 3x + 4 = \log_2(5) \quad \text{cioe'} \quad x = \frac{1}{3}(\log_2(5) - 4).$$

Esempio. L'equazione $2^{3x+4} = -1$ non ha alcuna soluzione.

Esempio. Consideriamo l'equazione $\log_2(3x+4) = 5$.
Il I membro e' definito per

$$3x + 4 > 0, \quad \text{cioe' per} \quad x > -\frac{4}{3}.$$

Essendo la funzione $\exp_2$ definita su $\mathbb{R}$ e iniettiva, sotto la condizione di sopra, si ha

$$\log_2(3x+4) = 5 \quad \text{equivalente a} \quad 3x + 4 = 2^5, \quad \text{cioe'} \quad x = \frac{28}{3}.$$

Questa soluzione rispetta la condizione di sopra, dunque e' accettabile. .

Esempio. Consideriamo l'equazione $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
Considerando la definizione di $\cos(x)$, si "vede" che, nell'intervallo $]-\pi, \pi[$, le soluzioni dell'equazione sono

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Essendo la funzione coseno periodica di periodo π, l'insieme delle soluzioni della disequazione e' dato da

$$x_{1h} = -\frac{\pi}{3} + 2h\pi \quad \text{e} \quad x_{2k} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad (h, k \in \mathbb{Z}).$$

Esempio. Consideriamo l'equazione $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 3$.
Il I membro e' definito ed il secondo membro e' consistente col I per

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases}, \quad \text{cioe'} \quad \frac{3}{2} \leq x \leq 3.$$

Essendo la funzione $[0, +\infty[\to \mathbb{R}, \square \mapsto \square^2$ iniettiva, sotto la condizione di sopra, si ha

$$\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 3 \quad \text{equivalente a} \quad -x^2 + 4x - 3 = (2x-3)^2,$$
$$\text{cioe'} \quad 5x^2 - 16x + 12 = 0 \quad \text{cioe'} \quad \left(x = \frac{6}{5} \ \text{oppure} \ x = 2\right).$$

Di queste due soluzioni, solo $x = 2$ e' accettabile.

Esempio. L'equazione

$$|2x + 3| = 4$$

e' equivalente a

$$(2x + 3 = -4 \ \text{oppure} \ 2x + 3 = 4) \quad \text{cioe'} \quad \left(x = -\frac{7}{2} \ \text{oppure} \ x = \frac{1}{2}.\right).$$

Disequazioni algebriche Una disequazione algebrica di grado n nell'incognita x e' una disequazione del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i > 0$$

o simili, dove $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ e $c_n \neq 0$.

Si suppone che il lettore abbia familiarita' con le disequazioni di I e II grado

$$ax + b > 0, \quad \text{e simili} \qquad (a \neq 0)$$
$$ax^2 + bx + c > 0, \quad \text{e simili} \qquad (a \neq 0)$$

Talvolta si puo' ricondurre la risoluzione di una disequazione algebrica di grado maggiore di 2 alla risoluzione di equazioni di grado minore o uguale a due.

Esempio. Consideriamo la disequazione

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 > 0.$$

Abbiamo visto che le radici del polinomio $p(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ sono $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, e $x_3 = 5$, dunque $p(x) = (x-2)(x-3)(x-5)$, e la disequazione si puo' riscrivere

$$(x-2)(x-3)(x-5) > 0;$$

Esaminando il segno dei fattori si ottiene che la disequazione ha insieme delle soluzioni dato da

$$2 < x < 3 \quad \text{oppure} \quad 5 < x,$$

in altri termini, si ha l'insieme

$$]2, 3[\smile]5, +\infty[.$$

Esempio. Consideriamo la disequazione $x^3 > 5$.
Essendo la funzione $\Box \mapsto \sqrt[3]{\Box}$, definita su $\mathbb{R}$ e strettamente crescente si ha

$$x^3 > 5 \quad \text{equivalente a} \quad \sqrt[3]{x^3} > \sqrt[3]{5}, \quad \text{cioe'} \quad x > \sqrt[3]{5},$$

e quest'ultima disequazione descrive esplicitamente le sue soluzioni.

Esempio. Consideriamo la disequazione $x^4 < 5$.
Non possiamo fare come sopra usando la radice quarta al posto della terza ... Consideriamo la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$, consideriamo il suo grafico $y = x^4$, cerchiamo i punti del grafico di sotto della retta $y = 5$, prendiamo i corrispondenti punti sull'asse x, ed otteniamo

$$]-\sqrt[4]{5}, +\sqrt[4]{5}[.$$

Le disequazioni razionali fratte nell'incognita x, cioe' le disequazioni riconducibili alla forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 \quad \text{o simili}$$

con $p(x), q(x)$ polinomi in x e $q(x)$ diverso dal polinomio identicamente nullo, si trattano in modo simile alle disequazioni algebriche. Di seguito consideriamo alcuni esempi di altri tipi di disequazioni: esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, irrazionali, con valore assoluto.

Esempio. Consideriamo la disequazione $2^{3x+4} > 5$.
Essendo la funzione $\log_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ strettamente crescente ed essendo entrambe i membri in $]0, +\infty[$ per ogni x, si ha

$$2^{3x+4} > 5 \quad \text{equivalente a} \quad \log_2(2^{3x+4}) > \log_2(5)$$
$$\text{cioe'} \quad 3x + 4 > \log_2(5) \quad \text{cioe'} \quad x > \frac{1}{3}(\log_2(5) - 4),$$

e quest'ultima disequazione descrive esplicitamente le sue soluzioni.

Esempio. La disequazione $2^{3x+4} < 0$ non ha alcuna soluzione.

Esempio. Consideriamo la disequazione $\log_2(3x + 4) < 5$.
Il I membro e' definito per

$$3x + 4 > 0, \quad \text{cioe' per} \quad x > -\frac{4}{3}.$$

Essendo la funzione $\exp_2$ definita su $\mathbb{R}$ e strettamente crescente, sotto la condizione di sopra, si ha

$$\log_2(3x + 4) < 5 \quad \text{equivalente a} \quad 3x + 4 < 2^5, \quad \text{cioe'} \quad x < \frac{28}{3}.$$

Dunque l'insieme delle soluzioni e' dato dai valori di x tali che

$$-\frac{4}{3} < x < \frac{28}{3}.$$

Esempio. Consideriamo la disequazione $\cos(x) > \frac{1}{2}$.
Considerando la definizione di $\cos(x)$, si "vede" che, nell'intervallo $] - \pi, \pi[$, l'insieme delle soluzioni della disequazione e' l'intervallo

$$] - \frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}[.$$

Essendo la funzione coseno periodica di periodo π, l'insieme delle soluzioni della disequazione e' l'unione di intervalli

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}] - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, +\frac{\pi}{3} + 2k\pi[$$

Esempio. Consideriamo la disequazione $\sqrt{-x^2+4x-3} < 2x-3$.
Il I membro e' definito ed il secondo membro e' consistente col I per

$$\begin{cases} -x^2+4x-3 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}, \quad \text{cioe'} \quad \frac{3}{2} \leq x \leq 3.$$

Essendo la funzione $[0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $\square \mapsto \square^2$ strettamente crescente, sotto la condizione di sopra, si ha

$$\sqrt{-x^2+4x-3} < 2x-3 \quad \text{equivalente a} \quad -x^2+4x-3 < (2x-3)^2,$$

$$\text{cioe'} \quad 5x^2-16x+12>0 \quad \text{cioe'} \quad (x<\frac{6}{5} \text{ oppure } x>2).$$

Dunque le soluzioni della disequazione data sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \leq x \leq 3 \\ x < \frac{6}{5} \text{ oppure } x > 2 \end{cases}, \quad \text{cioe'} \quad 2 < x \leq 3,$$

e questa disequaziione descrive esplicitamente le sue soluzioni.

Esempio. La disequazione

$$|2x+3| < 4$$

e' equivalente a

$$-4 < 2x+3 < 4, \quad \text{cioe'} \quad \begin{cases} 2x+3<4 \\ 2x+3>-4 \end{cases} \quad \text{cioe'} \quad -\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2}.$$