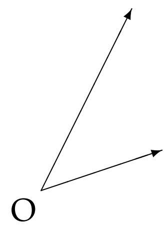
Spazi vettoriali

Indipendenza lineare.

Nel piano vettoriale $\mathcal{G}^2$, fissato un punto O ed identificati i vettori con i segmenti orientati con origine in O, informalmente si puo' dire che che due vettori sono "in posizione generale" se nessuno dei due sta sulla retta dell'altro, o equivalentemente se nessuno dei due si puo' ottenere come multiplo scalare dell'altro.



Definizione 1 *Una sequenza* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *di almeno due vettori di uno spazio vettoriale* V *si dice linearmente indipendente se nessun vettore* $\mathbf{v}_i$ *si puo' ottenere come combinazione lineare degli altri vettori* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$*. In caso contrario, cioe' se se esiste almeno un vettore* $\mathbf{v}_i$ *che si puo' ottenere come combinazione lineare degli altri vettori* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$*. si dice che la sequenza* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *e' linearmente dipendente. Un vettore* $\mathbf{v}$ *si dice linearmente indipendente o dipendente secondo che* $\mathbf{v}$ *e' diverso o uguale al vettore nullo* $\mathbf{0}$.

Osserviamo che due sequenze di vettori che differiscono solo per l'ordine nel quale in esse compaiono i vettori o sono entrambe linearmente indipendenti o sono entrambe linearmente dipendenti. Inoltre, se in una sequenza $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di vettori si ha che in corrispondenza due indici distinti compaiono due vettori uguali allora la sequenza e' linearmente dipendente. (Infatti, indicati con h e k tali indici, si ha che $\mathbf{v}_h$ si puo' ottenere come quella combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{h-1}, \mathbf{v}_{h+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$ nella quale il coefficiente di $\mathbf{v}_k$ e' 1 e gli altri coefficienti sono 0.)
Spesso al posto di dire che una sequenza $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di vettori e' linearmente indipendente (o dipendente) si dice per brevita' che i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono lineramente indipendenti (o dipendenti).

Esempi

- I vettori $(1, 2, 3)$, $(0, 0, 0)$ sono linearmente dipendenti in quanto $(0, 0, 0) = 0(1, 2, 3)$.
- I vettori $(2, 6, 4)$, $(3, 9, 6)$ sono linearmente dipendenti in quanto $(2, 6, 4) = \frac{2}{3}(3, 9, 6)$.

- I vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ sono linearmente indipendenti in quanto
  -non esiste alcun $r \in \mathbb{R}$ tale che $(1,0,0) = r(0,1,0)$ e
  -non esiste alcun $s \in \mathbb{R}$ tale che $(0,1,0) = s(1,0,0)$.

- I vettori $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ sono linearmente dipendenti in quanto
  $(4,5,6) = \frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(7,8,9)$.

- I vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ sono linearmente indipendenti in quanto:
  -non esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che $(1,0,0) = r(0,1,0) + s(0,0,1)$;
  -non esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che $(0,1,0) = r(1,0,0) + s(0,0,1)$;
  -non esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che $(0,0,1) = r(1,0,0) + s(1,0,0)$.

Qualcosa in generale

- Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ vettori di uno spazio vettoriale V. Se esiste un indice $i \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v}_i$ si puo' ottenere come la combinazione lineare degli altri vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$ nella quale tutti i coefficienti sono 0. Dunque i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente dipendenti.

- Per due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ non nulli in uno spazio vettoriale V, le seguenti condizioni sono equivalenti:

  (1) $\mathbf{v}_1$ si puo' ottenere come multiplo scalare di $\mathbf{v}_2$;

  (2) $\mathbf{v}_2$ si puo' ottenere come multiplo scalare di $\mathbf{v}_1$.

  Il fatto che $(1) \Rightarrow (2)$ si puo' motivare come segue. Supponiamo che $\mathbf{v}_1$ si possa ottenere come multiplo scalare $\mathbf{v}_1 = r\mathbf{v}_2$ di $\mathbf{v}_2$; notiamo che essendo $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ si deve avere $r \neq 0$, dunque moltiplicando entrambe i membri per $\frac{1}{r}$ possiamo ricavare $\mathbf{v}_2$ come multiplo scalare $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{r}\mathbf{v}_1$ di $\mathbf{v}_1$. Il fatto che $(2) \Rightarrow (1)$ si puo' motivare analogamente.

  In particolare, si ha che due vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se le componenti dell'uno sono proporzionali alle componenti dell'altro.

- Sia n un intero positivo fissato. Per ciascun $i = 1, 2, \ldots, n$, il vettore avente la $i-$ma componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a zero si dice $i-$mo vettore canonico di $\mathbb{R}^n$ e si indica con $\mathbf{e}_i$. Esplicitamente, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\ldots,0,0) \\
\mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\ldots,0,0) \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0,0,0,\ldots,0,1)
\end{aligned}
$$

Per ogni fissato indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ si ha che l'ugualglianza

$$\mathbf{e}_i = r_1\mathbf{e}_1 + \cdots + r_{i-1}\mathbf{e}_{i-1} + r_{i+1}\mathbf{e}_{i+1} + \cdots + r_n\mathbf{e}_n \qquad (r_* \in \mathbb{R})$$

e' impossibile in quanto, uguagliando le $i-$ma componenti del I e del II membro si ha

$$1 = r_1 \cdot 0 + \cdots + r_{i-1} \cdot 0 + r_{i+1} \cdot 0 + \cdots + r_n \cdot 0 = 0.$$

Dunque i vettori canonici $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono linearmente indipendenti.

Problemi.

- Ci chiediamo se i vettori $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono linearmente indipendenti (dimenticandoci che sappiamo gia' che sono linearmenmte dipendenti).

  Ci chiediamo se esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che

  $$(1, 2, 3) = r(4, 5, 6) + s(7, 8, 9);$$

  questa equazione nelle incognite r, s equivale al sistema di tre equazioni lineari nelle incognite r, s

  $$\begin{cases} 4r + 7s &= 1 \\ 5r + 8s &= 2 \\ 6r + 9s &= 3 \end{cases};$$

  questo sistema equivale al sistema $\begin{cases} 4r + 7s &= 1 \\ -\frac{3}{4}s &= \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2}s &= -\frac{3}{2} \end{cases}$, che ha soluzione $r = 2$, $s = -1$; dunque si ha

  $$(1, 2, 3) = 2(4, 5, 6) + (-1)(7, 8, 9).$$

  I vettori $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono linearmente dipendenti.

- Ci chiediamo se i vettori $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 9)$, $(1, 4, 16)$ sono linearmente indipendenti.

  Ci chiediamo se esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che

  $$(1, 2, 4) = r(1, 3, 9) + s(1, 4, 16);$$

  questa equazione nelle incognite r, s equivale al sistema di tre equazioni lineari nelle incognite r, s

  $$\begin{cases} r + s &= 1 \\ 3r + 4s &= 2 \\ 9r + 16s &= 4 \end{cases};$$

questo sistema equivale al sistema $\begin{cases} r+s = 1 \\ s = -1 \\ 7s = -5 \end{cases}$, che non ha soluzioni; dunque non esistono $r, s \in \mathbb{R}$ tali che

$$(1,2,3) = r(4,5,6) + s(7,8,9).$$

Dobbiamo allora chiederci se esistono $r, s \in R$ tali che

$$(1,3,9) = r(1,2,4) + s(1,4,16);$$

questa equazione nelle incognite r, s equivale ad un sistema di tre equazioni lineari nelle incognite r, s ... Si vede che procedere risulta un po' laborioso; lasciamo per il momento la questione in sospeso.

Caratterizzazione della indipendenza lineare

Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ vettori di uno spazio vettoriale V. Supponiamo che per un certo indice $i \in \{1, \ldots, m\}$ il vettore $\mathbf{v}_i$ si possa ottenere come una combinazione lineare

$$\mathbf{v}_i = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + r_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + r_m\mathbf{v}_m$$

degli altri vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_m$, con certi coefficienti. Portando tutti i vettori al I membro, si ottiene

$$(-r_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (-r_{i-1})\mathbf{v}_{i-1} + (1)\mathbf{v}_i + (-r_{i+1})\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + (-r_m)\mathbf{v}_m = \mathbf{0},$$

si ottiene cioe' il vettore nullo $\mathbf{0}$ come una combinazione linerare dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, nella quale il coefficiente del vettore $\mathbf{v}_i$ e' diverso da 0 (in quanto vale 1). Si prova che vale anche il viceversa, e da queste considerazioni si ricava il

Teorema 1 *Una sequenza $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di vettori di uno spazio vettoriale V e' linearmente dipendente se e solo se esistono degli scalari $r_1, \ldots, r_m$ non tutti nulli tali che*

$$r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$

Una sequenza $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di vettori di uno spazio vettoriale V e' linearmente indipendente se e solo se l'equazione nelle incognite $x_1, \ldots, x_m$

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

ha solo la soluzione banale $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Problema

- Ci chiediamo di nuovo se i vettori $(1,2,4)$, $(1,3,9)$, $(1,4,16)$ sono linearmente indipendenti o dipendenti. Consideriamo l'equazione

$$x_1(1,2,4) + x_2(1,3,9) + x_3(1,4,16) = (0,0,0),$$

nelle incognite scalari x_1, x_2, x_3. Questa equazione fra vettori di $\mathbb{R}^3$ e' equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 0 \end{cases},$$

che e' equivalente al sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$, che ha solo la soluzione banale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. I vettori $(1,2,4)$, $(1,3,9)$, $(1,4,16)$ sono linearmente indipendenti.

Equazioni a coefficienti vettoriali e sistemi di equazioni lineari.

Sia n un intero positivo fissato. Osserviamo che

> ciascuna equazione lineare in m incognite scalari $x_1, \ldots, x_m$ con coefficienti e termini noti in $\mathbb{R}^n$ equivale a un sistema di n equazioni lineari nelle m incognite scalari $x_1, \ldots, x_m$ con coefficienti e termini noti in $\mathbb{R}$.

Esplicitamente, a ciascuna equazione nelle incognite scalari $x_1, \ldots, x_m$

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

con coefficienti e termine noto

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_m &= (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm}) \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, \ldots, b_n) \end{aligned}$$

dati vettori in $\mathbb{R}^n$, equivale il sistema delle n equazioni lineari nelle m incognite $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}.$$

Sistemi lineari omogenei.

Ciascuna equazione lineare nelle incognite scalari $x_1, \ldots, x_n$ con termine noto nullo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0, \qquad (a_1, \ldots, a_n, 0 \in \mathbb{R})$$

si dice "equazione lineare omogenea;" ciascun sistema di m equazioni lineari omogenee nelle incognite scalari $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

si dice "sistema lineare omogeneo". Si ha che

> ciascun sistema lineare omogeneo nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ ha almeno la soluzione $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, detta "soluzione banale" del sistema.

Dalla Proposizione sui sistemi lineari con meno equazioni che incognite segue diretttamente la

Proposizione 1 *Ciascun sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite con $m < n$ e' indeterminato, in particolare ha qualche soluzione non banale.*

Massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$.

Nel piano vettoriale geometrico $\mathcal{G}^2$ non si hanno piu' di due vettori linearmente indipendenti, e nello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{G}^3$ non si hanno piu' di tre vettori linearmente indipendenti. Dalla Proposizione sui sistemi lineari omogenei e dal teorema di caratterizzazione della'indipendenza lineare segue direttamente

Proposizione 2 *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ciascuna sequenza di $m > n$ vettori e' linearmente dipendente.*