Limiti

Il concetto di limite ha una lunga storia; alcune tappe: gli antichi greci in particolare con Eudosso e Archimede immaginarono ed usarono un "principio di esaustione" per determinare lunghezze, aree e volumi di figure geometriche; Newton e Leibniz nel XVII secolo usarono una forma del concetto di limite per fondare il calcolo infintesimale e integrale; Cauchy nel IXX secolo diede una definizione rigorosa del concetto di limite, sostanzialmente la stessa definizione ancora oggi usata. Il concetto di limite e' fondamentale per tutta l'analisi matematica, per buona parte della matematica in generale, e per le sue applicazioni.

Noi considereremo i limiti di una funzione $f(x)$ reale di variabile reale, prima per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$ e poi per x che tende a un numero reale. Spesso penseremo la funzione come la legge oraria del moto di un punto materiale su una retta, penseremo cioe' $f(x)$ come la coordinata sulla retta del punto in cui si trova il punto materiale all'istante x.

Limite di una funzione per x che tende a $+\infty$, $-\infty$.

Premessa alla definzione Lo stile di questa premessa e' volutamente informale. Data una funzione $f(x)$ definita per ogni x abbastanza grande, e' naturale studiare il comportamento di $f(x)$ per x via via piu' grande, ed immaginare di potere cogliere tutto il processo con un solo sguardo.

(1) Consideriamo la funzione

$$f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{4x}{2x+1}.$$

Per x via via piu' grande si ha che il contributo di 1 al denominatore diventa via via trascurabile, cosi' che il valore di $4x/(2x+1)$ diventa via via vicino al valore di $4x/(2x) = 2$. Viene da dire che per x che tende a $+\infty$ il valore $f(x)$ tende al limite 2.

(2) Consideriamo la funzione

$$g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \log_2(x)$$

La funzione e' strettamente crescente; inoltre aassume valori arbitrariamente grandi: ad esempio ai valori $x = 1, 2, 4, \ldots, 2^n$ fa corrispondere i valori $f(x) = 0, 1, 2, \ldots, n$. Viene da dire che per x che tende a $+\infty$ il valore $g(x) = \log_2(x)$ tende al limite $+\infty$.

(3) Consideriamo la funzione

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \cos(x)$$

La funzione assume periodicamente tutti i valori fra -1 ed 1. Viene da dire che per x che tende a $+\infty$ il valore $h(x) = \cos(x)$ non tende ad alcun limite.

Distanza. Intorni Fissati su una retta un primo ed un diverso secondo punto, consideriamo l'identificazione sopra descritta dei numeri reali con punti sulla retta nella quale il numero 0 e il numero 1 sono identificati col primo punto e col secondo punto. Usiamo i termini "numero reale" e "punto" come sinonimi, e diciamo in breve "punto a" al posto di "punto di ordinata a". Assunto come unita' di misura il segmento di estremi 0 e 1, si ha che

$$\text{distanza fra } a \text{ e } b \; = |a-b|.$$

Notiamo che per ogni tre punti a, b, c si ha

$$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$$

(dove l'uguaglianza vale se e solo se c e' interno al segmento di estremi a e b.)

Dato un punto c ed un numero reale positivo $r > 0$, diciamo "intorno di centro c e raggio r" ed indichiamo con $I_c(r)$ l'insieme dei puntti della retta che distano da c per meno di r; in simboli:

$$I_c(r) = \{x \in \mathbb{R} : \; |x-c| < r\}.$$

Questo insieme e' un intervallo, precisamente:

$$I_c(r) =]c-r, c+r[.$$

Notiamo che fra i vari intorni di due punti distinti ce ne sono almeno due che sono disgiunti (in realta' infiniti); infatti dati i punti c_1 e c_2 con $c_1 \neq c_2$ si ha

$$I_{c_1}(r_1) \frown I_{c_2}(r_2) = \emptyset,$$

per ogni due numeri reali positivi $r_1, r_2 > 0$ che soddisfano la condizione $r_1 + r_2 < |c_1 - c_2|$.

Definizione di limite finito per x che tende a $+\infty$.

Definizione 1 *Siano date una funzione $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ ed un numero reale l. Si dice che*

il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e' l

se e solo se

per ogni intorno $I_l(r)$ del punto l esiste un numero reale H tale che

$$f(x) \in I_l(r), \quad \textit{per ogni } \; x > H.$$

In simboli:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \textit{se e solo se} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad \exists H \in \mathbb{R} :$$
$$|f(x) - l| < r, \quad \forall x > H$$

Il numero reale H che compare nella definizione dipende da r; spesso si sottolinea questa dipendenza scrivedo H_r al posto di H. Sopra si suppone tacitamente che $H \geq a$, in modo che il valore $f(x)$ sia definito per ogni $x > H$.

Se la funzione $f(x)$ viene riguardata come la legge del moto di un punto materiale P su una retta, allora la definizione di sopra puo' essere riguardata nel modo seguente: il limite del punto P per il tempo che tende a $+\infty$ e' l se e solo se per ogni intorno $I_l(r)$ di l esiste un istante a partire dal quale il punto P sta definitivamente in $I_l(r)$.

Esempio. Consideriamo di nuovo la funzione

$$\frac{4x}{2x+1}, \qquad x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$$

e verifichiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x+1} = 2.$$

Dobbiamo verificare che per ogni $r \in \mathbb{R}^+$ esiste un $H_r \in \mathbb{R}$ tale che la disequazione

$$\left| \frac{4x}{2x+1} - 2 \right| < r$$

sia soddisfatta per ogni $x > H_r$. Svolgendo i calcoli dentro il valore assoluto la disequazione diviene $\left|\frac{-2}{2x+1}\right| < r$; ora, sotto la condizione $x > -\frac{1}{2}$, la disequazione diviene $\frac{2}{2x+1} < r$; questa disequazione, sempre sotto la condizione $x > -\frac{1}{2}$, equiavale alla disequazione $2 < r(2x+1)$, la cui soluzione e' data da

$$x > \frac{2-r}{2} r.$$

Dunque, posto $H_r = \max(-\frac{1}{2}, \frac{2-r}{2} r)$, si ha

$$\left| \frac{4x}{2x+1} - 2 \right| < r$$

per ogni $x > H_r$. Abbiamo cosi' completato la verifica.

Definizione di limite $+\infty$ o $-\infty$ per x che tende a $+\infty$.

Definizione 2 *Sia data una funzione $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Si dice che*

il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e' $+\infty$

se e solo se

per ogni numero reale M esiste un numero reale H tale che

$$f(x) > M, \quad \textit{per ogni } \; x > H.$$

In simboli:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \textit{se e solo se} \quad \forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists H \in \mathbb{R}:$$
$$f(x) > M, \quad \forall x > H$$

Il numero reale H che compare nella definizione dipende da M; spesso si sottolinea questa dipendenza scrivedo H_M al posto di H. Sopra si suppone tacitamente che $H \geq a$, in modo che il valore $f(x)$ sia definito per ogni $x > H$.

Se la funzione $f(x)$ viene riguardata come la legge del moto di un punto materiale P su una retta, allora la definizione di sopra puo' essere riguardata nel modo seguente: il limite del punto P per il tempo che tende a $+\infty$ e' $+\infty$ se e solo se per ogni punto M esiste un istante a partire dal quale il punto P supera definitivamente il punto M.

Analogamente si da la

Definizione 3 *Sia data una funzione* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. *Si dice che*

il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e' $-\infty$

se e solo se

per ogni numero reale M esiste un numero reale H tale che

$$f(x) < M, \quad \textit{per ogni} \;\; x > H.$$

In simboli:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \textit{se e solo se} \quad \forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists H \in \mathbb{R}:$$
$$f(x) < M, \quad \forall x > H$$

Esempio. Consideriamo di nuovo la funzione

$$\log_2(x), \qquad x \in]0, +\infty[$$

e verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2(x) = +\infty.$$

Basta osservare che per ogni $M \in \mathbb{R}$ la disequazione

$$\log_2(x) > M$$

e' equivalente alla disequazione

$$x > 2^M.$$

e porre $H_M = 2^M$.

Osservazione La definizione di limite finito di una funzione per $x \to +\infty$ puo' essere espressa anche nella forma

il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e' l

se e solo se

per ogni intorno $I_l(r)$ del punto l esiste un numero reale H tale che

$$f(]H, +\infty[) \subseteq I_l(r).$$

Qui sopra $f(]H, +\infty[)$ e' l'insieme $\{f(x); \quad x \in]H, +\infty[\}$, cioe' l'immagine dell'intevallo $]H, +\infty[$ tramite la funzione f.

Esempio Proviamo che l'affermazione

"il limite di $\cos(x)$ per x che tende a $+\infty$ e' 1"

e' falsa. L'affermazione di in questione significa

per ogni intorno di $I_1(r)$ di 1 esiste un $H \in \mathbb{R}$ tale che

$$\cos(]H, +\infty[) \subseteq I_1(r)$$

Questa affermazione e' falsa in quanto:
per ogni $H \in \mathbb{R}$ si ha

$$\cos(]H, +\infty[) = [-1, 1];$$

per $r = 1/2$ si ha

$$I_1(1/2) =]1/2, 3/2[;$$

e $[-1, 1] \not\subseteq]1/2, 3/2[$.

Descrizione grafica Le definizioni sopra date dei limiti per x che tende a $+\infty$ di una data funzione $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ si possono esprimere anche nei termini del grafico di f. Ad esempio, si ha

Il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e' un numero reale l se e solo se

per ogni striscia orizzontale

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad l - r < y < l + r\}$$

di semiampiezza $r > 0$ centrata sulla retta $y = l$, esiste un $H \in \mathbb{R}$ tale che l'intersezione del grafico di di f col semipiano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x > H\}$$

sia contenuta nella striscia.