## Limiti.

## Limite di una funzione per $x$ che tende a $+\infty, -\infty$.

**Semiintorni.** Fissati su una retta un primo ed un diverso secondo punto, consideriamo l'identificazione sopra descritta dei numeri reali con punti sulla retta nella quale il numero 0 e il numero 1 sono identificati col primo punto e col secondo punto. La scelta di un primo ed un secondo punto sulla retta induce una relazione d'ordine "... precede ..." sull'insieme dei punti della retta. Nell'identificazione dell'insieme dei numeri reali con l'insieme dei punti della retta la relazione "... precede .." sui punti corrisponde alla relazione "... e' minore di ..." sui numeri.

Dato un punto $c$ ed un numero reale positivo $r > 0$,
(1) diciamo "intorno inferiore di centro $c$ e raggio $r$" ed indichiamo con $I_c^-(r)$ l'insieme dei punti della retta che precedono o sono uguali a $c$ e che distano da $c$ per meno di $r$; in simboli:

$$I_c^-(r) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \leq c, \quad |x - c| < r\}.$$

Questo insieme e' un intervallo, precisamente:

$$I_c^-(r) = ]c - r, c].$$

(2) diciamo "intorno superiore di centro $c$ e raggio $r$" ed indichiamo con $I_c^+(r)$ l'insieme dei punti della retta che seguono o sono uguali a $c$ e che distano da $c$ per meno di $r$; in simboli:

$$I_c^+(r) = \{x \in \mathbb{R} : \quad c \leq x, \quad |x - c| < r\}.$$

Questo insieme e' un intervallo, precisamente:

$$I_c^+(r) = [c, c + r[.$$

**Definizione di limite $l^-$ ed $l^+$ per $x$ che tende a $+\infty$.**

**Definizione 1** *Siano date una funzione $f : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ ed un numero reale $l$.*

*(1) Si dice che il limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $+\infty$ e' $l^-$ se e solo se*

*per ogni semiintorno $I_l^-(r)$ del punto $l$ esiste un numero reale $H$ tale che*

$$f(x) \in I_l^-(r), \quad \text{per ogni } x > H.$$

*In simboli:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^- \quad \text{se e solo se} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad \exists H \in \mathbb{R} :$$
$$l - r < f(x) \leq r, \quad \forall x > H$$

*(2) Si dice che il limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $+\infty$ e' $l^+$ se e solo se*

*per ogni semiintorno $I_l^+(r)$ del punto $l$ esiste un numero reale $H$ tale che*

$$f(x) \in I_l^+(r), \quad \text{per ogni } x > H.$$

*In simboli:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l^+ \quad \text{se e solo se} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad \exists H \in \mathbb{R} :$$
$$l \le f(x) < l + r, \quad \forall x > H$$

**Esempio.** Consideriamo di nuovo la funzione

$$\frac{4x}{2x+1}, \qquad x \in ]-\frac{1}{2}, +\infty[$$

e verifichiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2x+1} = 2^-.$$

Dobbiamo verificare che per ogni $r \in \mathbb{R}^+$ esiste un $H_r \in \mathbb{R}$ tale che le disequazioni

$$2 - r < \frac{4x}{2x+1} \le 2$$

siano soddisfatte per ogni $x > H_r$. La disequazione $4x/(2x+1) \le 2$ e' sempre soddisfatta in quanto per $x > -\frac{1}{2}$ si ha $4x/(2x+1) \le (4x+2)/(2x+1) = 2$. Per il resto, si procede come nella verifica dell'affermazione che il limite della funzione in questione per $x \to +\infty$ e' 2.

**Limiti elementari** Le funzioni potenze, esponenziali e logaritmi

$x^\alpha, \quad x \in ]0, +\infty[ \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$
$b^x, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (b > 0),$
$\log_b x, \quad x \in ]0, +\infty[ \qquad (0 < b \ne 1),$

per $x \to +\infty$ hanno il seguente comportamento

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0^+ & 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_b x = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ -\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

Inoltre, per le funzioni polinomiali di I e II grado si ha

$$\lim_{x\to+\infty} (ax + b) = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases} \qquad (a \ne 0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^2+bx+c) = \begin{cases} +\infty & a>0 \\ -\infty & a<0 \end{cases} \qquad (a\neq 0)$$

Questi fatti si possono riconoscere come plausibili, considerando il grafico delle corrispondenti funzioni elementari; tutti si possono anche dimostrare facilmente.

Osserviamo che

(1) le funzioni esponenziali relative a basi diverse sono legate dalle relazione

$$b_2^x = b_1^{(\log_{b_1} b_2)x},$$

dunque in particolare si ottengono l'una dall'altra mediante un cambiamento lineare della variabile in entrata.

(2) le funzioni logaritmo relative a basi diverse sono legate dalle relazione

$$\log_{b_2} x = (\log_{b_2} b_1)\log_{b_1} x$$

dunque in particolare si ottengono l'una dall'altra mediante un cambiamento lineare della variabile in uscita.

**Teorema dei due carabinieri.** Consideriamo le funzioni

$$\frac{\sin(x)}{x}, \qquad x\in ]0,+\infty[$$
$$x+\sin(x), \qquad x\in\mathbb{R}$$

Si ha che

- esiste il limite di $\frac{\sin(x)}{x}$ per $x\to+\infty$ e questo limite e' 0.
- esiste il limite di $x+\sin(x)$ per $x\to+\infty$ e questo limite e' $+\infty$.

Queste affermazioni si possono motivare usandola definizione, ma con meno fatica usando i seguenti Teoremi.

**Teorema 1** *Siano $f_1, g, f_2 : ]a,+\infty[ \to \mathbb{R}$ tre funzioni tali che $f_1(x)\leq g(x)\leq f_2(x)$ per ogni $x\in ]a,+\infty[$. Se esistono i limiti di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ per $x\to+\infty$ e sono uguali ad un numero $l$, allora esiste anche il limite di $g(x)$ per $x\to+\infty$ ed e' uguale ad $l$. In breve:*

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x)\leq g(x)\leq f_2(x) \\ \lim_{\dots} f_1(x) = l = \lim_{\dots} f_2(x) \end{array}\right\} \quad \textit{implica che} \quad \lim_{\dots} g(x) = l.$$

**Teorema 2** *Siano $f, g : ]a,+\infty[ \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(x)\leq g(x)$ per ogni $x\in ]a,+\infty[$. Se il limite di $f(x)$ per $x\to+\infty$ e' $+\infty$, allora anche il limite di $g(x)$ per $x\to+\infty$ e' $+\infty$. In breve:*

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\leq g(x) \\ \lim_{\dots} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad \textit{implica che} \quad \lim_{\dots} g(x) = +\infty.$$

Esiste anche un analogo teorema per il limite $-\infty$. Il primo teorema viene detto "teorema dei due carabinieri" ( si pensano $f_1$ ed $f_2$ come carabinieri, $g$ come malfattore, $l$ come cella ).

**Applicazioni.**
-Consideriamo di nuovo la funzione $\frac{\sin(x)}{x}$, $(x \in ]0, +\infty[)$. Osserviamo che

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \forall x \in ]0, +\infty[$$
$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$$

dunque per il teorema dei due carabinieri si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

-Consideriamo di nuovo la funzione $x + \sin(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. Osserviamo che

$$x - 1 \leq x + \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$$

dunque per una variante del teorema dei due carabinieri si ha

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin(x)) = +\infty.$$

**Variante.** Spesso al posto di dire che "il limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $+\infty$ e' $l$" si dice un po' piu' in breve che "$f(x)$ tende a $l$ per $x$ che tende a $+\infty$", e in simboli

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \qquad \text{si scrive anche} \qquad f(x) \to l \ \text{ per } \ x \to +\infty.$$

Analoghe varianti si hanno per i limiti $+\infty$ e $-\infty$.

**Limiti e operazioni aritmetiche sulle funzioni. Somma.** Di seguito descriviamo il comportamento dell'operazione di limite per $x \to +\infty$ rispetto alle operazioni aritmetiche sulle funzioni e sui numeri reali.

> Salvo avviso contrario, sottintenderemo sempre che i limiti sono per $x \to +\infty$.

L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di somma, nel caso di limite finito.

**Proposizione 1** *Siano $f, g : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ due funzioni, ed $\alpha, \beta$ due numeri reali.*

$$\textit{Se} \quad \left. \begin{array}{l} \lim f(x) = \alpha \\ \lim g(x) = \beta \end{array} \right\} \quad \textit{allora} \quad \lim(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta.$$

Un analogo risultato vale per l'operazione di differenza.

**Proposizione 2** *Per l'eventuale limite della funzione somma $f(x) + g(x)$ in funzione dei limiti delle funzioni addendi $f(x)$ e $g(x)$ vale la seguente tabella, dove: gli indici di riga sono i possibili limiti della funzione $f(x)$ e gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione $g(x)$; si distinguono i casi $-\infty$, un numero e $+\infty$.*

| $+$ | $-\infty$ | $\beta$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ? |
| $\alpha$ | $-\infty$ | $\alpha+\beta$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | ? | $+\infty$ | $+\infty$ |

Nell'ultima casella della prima riga si e' messo un punto di domanda in quanto per due funzioni, una tendente a $-\infty$ ed una a $+\infty$, la funzione somma puo' tendere a $+\infty$, tendere a $-\infty$, tendere a un numero finito, oppure non tendere ad alcun limite, come mostrato dagli esempi seguenti

| $f(x)$ | $g(x)$ | $f(x)+g(x)$ |
|---|---|---|
| $-x$ | $2x$ | $x$ |
| $-2x$ | $x$ | $-x$ |
| $x$ | $-x$ | $0$ |
| $-x$ | $x+\cos(x)$ | $\cos(x)$ |

Si dice che per due funzioni, una tendente a $+\infty$ ed una $-\infty$, il comportamento della funzione somma e' una forma di indecisione.

La relazione fra i limiti di due funzioni e l'eventuale limite della funzione loro somma data dalla tabella di sopra suggerisce di definire mediante la stessa tabella una somma nel quale sia gli addendi che il risultato possono essere numeri reali, $-\infty$, $+\infty$. Si tratta di un'operazione parziale; le somme che corrispondono alle forme di indecisione non sono definite; esplicitamente, non sono definite

$$-\infty+\infty \text{ e } +\infty+(-\infty).$$

Questa definizione permette di esprimere la proposizione di sopra nella forma

**Proposizione 3** *Siano $f, g : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ due funzioni. Se esistono $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$ e se la somma $\lim f(x) + \lim g(x)$ e' definita, allora esiste anche $\lim(f(x) + g(x))$, e*

$$\lim(f(x)+g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x).$$

**Limiti e operazioni aritmetiche sulle funzioni. Prodotto.** L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di prodotto, nel caso di limite finito.

**Proposizione 4** *Siano $f, g : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ due funzioni, ed $\alpha, \beta$ due numeri reali.*

$$\textit{Se} \quad \left.\begin{array}{l} \lim f(x) = \alpha \\ \lim g(x) = \beta \end{array}\right\} \quad \textit{allora} \quad \lim(f(x)g(x)) = \alpha\beta.$$

**Proposizione 5** *Per l'eventuale limite della funzione prodotto $f(x)g(x)$ in funzione dei limiti delle funzioni fattori $f(x)$ e $g(x)$ vale la seguente tabella, dove: gli indici di riga sono i possibili limiti della funzione $f(x)$ e gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione $g(x)$; si distinguono i casi* 0 *(nel senso di $0^+$ o $0^-$) un numero diverso da 0 e $\infty$ (nel senso di $+\infty$ o $-\infty$); il segno del prodotto e' dato dall'usuale regola.*

| $\cdot$ | $0$ | $\beta$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $?$ |
| $\alpha$ | $0$ | $\alpha\beta$ | $\infty$ |
| $\infty$ | $?$ | $\infty$ | $\infty$ |

Nell'ultima casella della prima riga si e' messo un punto di domanda in quanto per due funzioni, una tendente a 0 ed una a $\infty$, la funzione prodotto puo' tendere a $\infty$, tendere a 0, tendere a un numero finito, oppure non tendere ad alcun limite, come mostrato dagli esempi seguenti

| $f(x)$ | $g(x)$ | $f(x)g(x)$ |
|---|---|---|
| $x^{-1}$ | $x^2$ | $x$ |
| $x^{-2}$ | $x$ | $x^{-1}$ |
| $x^{-1}$ | $x$ | $1$ |
| $x^{-1}\sin(x)$ | $x$ | $\sin(x)$ |

Si dice che per due funzioni, una tendente a 0 ed una $\infty$, il comportamento della funzione somma e' una forma di indecisione.

La relazione fra i limiti di due funzioni e l'eventuale limite della funzione loro prodotto data dalla tabella di sopra suggerisce di definire mediante la stessa tabella un prodotto nel quale sia i fattori che il risultato possono essere numeri reali, $-\infty$, $+\infty$. Si tratta di un'operazione parziale; i prodotti che corrispondono alle forme di indecisione non sono definiti; in sostanza non e' definito

$$0 \cdot \infty.$$

Questa definizione permette di esprimere la proposizione di sopra nella forma

**Proposizione 6** *Siano $f, g : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ due funzioni. Se esistono $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$ e se il prodotto $(\lim f(x))(\lim g(x))$ e' definito, allora esiste anche $\lim(f(x)g(x))$, e*

$$\lim(f(x)g(x)) = (\lim f(x))(\lim g(x)).$$

**Funzioni polinomiali** Le funzioni polinomiali hanno limite per $x \to +\infty$ dato da

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \begin{cases} +\infty & a_n > 0 \\ -\infty & a_n < 0 \end{cases} \qquad (a_n \neq 0).$$

Infatti

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 = x^n \left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + a_{n-2}x^{-2} + \cdots + a_0 x^{-n}\right)$$

$$\to +\infty(a_n + a_{n-1}0 + a_{n-2}0 + \cdots + a_0 0) = +\infty a_n = \begin{cases} +\infty & a_n > 0 \\ -\infty & a_n < 0 \end{cases}$$