Limiti.

Limite di una funzione per x che tende a $+\infty, -\infty$.

Altri esempi. Diamo un paio di esempi di funzioni un po' diverse da quelle finora considerate.

Ricordiamo che l'approssimazione per difetto agli interi di un numero reale x si dice "parte intera" di x, e si indica con $[x]$; in altri termini, $[x]$ e' caratterizzata dalla condizione

$$x = [x] + \xi, \quad [x] \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \xi < 1.$$

Ad esempio, si ha $[\pi] = 3$ e $[-\pi] = -4$.

Associando ad ogni numero reale x la sua parte intera $[x]$ si ha una funzione; si ha $\lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$. Associando ad ogni numero reale x il reciproco $1/[x]$ della sua parte intera $[x]$ si ha una funzione; si ha $\lim_{x\to+\infty} 1/[x] = 0^+$.

Limiti e operazioni aritmetiche sulle funzioni. Inversione. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione aritmetica di inversione, nel caso di limite finito diverso da zero.

Proposizione 1 *Sia* $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione con* $f(x) \neq 0$ *per ogni* $x > a$, *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Se* $\lim f(x) = \alpha$ *e* $\alpha \neq 0$ *allora* $\lim (1/f(x)) = 1/\alpha$.

Proposizione 2 *Per l'eventuale limite della funzione* $1/f(x)$ *in funzione del limite della funzione* $f(x)$ *vale la seguente tabella, dove gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione* $f(x)$ *e si distinguono i casi* 0^+ *e* 0^-, *un numero diverso da 0,* $+\infty$ *e* $-\infty$.

$\lim f(x)$	0^+	0^-	α	$+\infty$	$-\infty$
$\lim (1/f(x))$	$+\infty$	$-\infty$	$1/\alpha$	0^+	0^-

Se il limite di $f(x)$ e' 0 senza essere ne' 0^+ ne' 0^- allora il limite di $1/f(x)$ puo' non esistere (in realta' non esiste mai). Ad esempio per la funzione

$$f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{[x]}$$

si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ma $\lim_{x\to+\infty} 1/f(x)$ non esiste.

Limiti e operazioni aritmetiche sulle funzioni. Quoziente. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di quoziente, nel caso in cui il limite della funzione numeratore e' finito e il limite della funzione denominatore e' finito e diverso da zero.

Proposizione 3 *Siano* $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *due funzioni, ed* α, β *due numeri reali, con* $\beta \neq 0$.

$$\text{Se} \quad \left.\begin{array}{l} \lim f(x) = \alpha \\ \lim g(x) = \beta \end{array}\right\} \quad \text{allora} \quad \lim(f(x)/g(x)) = \alpha/\beta.$$

In generale, si ha

Proposizione 4 *Per l'eventuale limite della funzione quoziente* $f(x)/g(x)$ *in funzione dei limiti delle funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *vale la seguente tabella, dove: gli indici di riga sono i possibili limiti della funzione* $f(x)$ *e gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione* $g(x)$*; si distinguono i casi* 0 *(nel senso di* 0^+ *o* 0^-*) un numero diverso da 0 e* ∞ *(nel senso di* $+\infty$ *o* $-\infty$*); il segno del quoziente e' dato dall'usuale regola.*

$\cdot$	0	β	∞
0	?	0	0
α	∞	α/β	0
∞	∞	∞	?

Nella prima casella della prima riga e nell'ultima casella dell'ultima riga si e' messo un punto di domanda in quanto per due funzioni, entrambe tendenti a 0 o entrambe tendenti a ∞, la funzione quoziente puo' tendere a ∞, tendere a un numero finito, oppure non tendere ad alcun limite. Si dice che in questi casi si ha una forma di indecisione.

La relazione fra i limiti di due funzioni e l'eventuale limite della funzione loro quoziente data dalla tabella di sopra suggerisce di definire mediante la stessa tabella un quoziente nel quale sia numeratore e denominatore che risultato possono essere numeri reali, $-\infty$, $+\infty$. Si tratta di un'operazione parziale; i quozienti che corrispondono alle forme di indecisione non sono definiti; esplicitamente non sono definiti

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Questa definizione permette di esprimere la proposizione di sopra nella forma

Proposizione 5 *Siano* $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *due funzioni, con* $g(x) \neq 0$ *per ogni* $x > a$*. Se esistono* $\lim f(x)$ *e* $\lim g(x)$ *e se il quoziente* $(\lim f(x))/(\lim g(x))$ *e' definito, allora esiste anche* $\lim(f(x)/g(x))$*, e*

$$\lim(f(x)/g(x)) = (\lim f(x))/(\lim g(x)).$$

Funzioni razionali. Consideriamo una funzione razionale data dal quoziente di un polinomio di grado $n > 0$ su un polinomio di grado $m > 0$

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}{cx^m + dx^{m-1} + \cdots} \qquad (a, c \neq 0).$$

In prima battuta si ha

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}{cx^m + dx^{m-1} + \cdots} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

(dove il segno di ∞ al numeratore e' il segno di a e il segno di ∞ al denominatore e' il segno di c), una forma di indecisione. Mettendo in evidenza a numeratore e denominatore i termini di grado massimo si ha

$$\frac{x^n(a + bx^{-1} + \cdots)}{x^m(c + dx^{-1} + \cdots)} \quad = \quad x^{n-m}\frac{a + bx^{-1} + \cdots}{c + dx^{-1} + cdots} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \infty & \text{se } n > m \\ a/c & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}.$$

(il segno di ∞ e il segno di a/c, analogamente per lo zero)

Limiti e operazioni aritmetiche sulle funzioni. Potenza. Per ogni due funzioni $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, con $f(x) > 0$ per ogni $x > a$, si ha una funzione $f^g ::]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, che associa a ciascun x la potenza $f(x)^{g(x)}$. In realta' ci si puo' sempre ricondurre al caso nel quale la funzione base e' una costante, infatti comunque scelto un numero reale b con $0 < b \neq 1$ si puo' scrivere

$$f(x)^{g(x)} = b^{(\log_b f(x))g(x)}, \qquad (f(x) > 0).$$

Proposizione 6 *Per l'eventuale limite della funzione $b^{f(x)}$ in funzione del limite della funzione $f(x)$ vale la seguente tabella, dove gli indici di colonna sono i possibili limiti della funzione $f(x)$.*

$\lim f(x)$	$-\infty$	α	$+\infty$
$\lim b^{f(x)},\ (1 < b)$	0^+	b^α	$+\infty$
$\lim b^{f(x)},\ (0 < b < 1)$	$+\infty$	b^α	0^+

Confronto Siano $f, g :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Si puo' confrontare il modo nel quale f, g tendono a $+\infty$; si dice che:

(1) $f(x)$ tende a $+\infty$ piu' velocemente di $g(x)$ se e solo se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty;$$

(2) $f(x)$ e $g(x)$ sono asintotiche se e solo se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1;$$

Il confronto fra le funzioni potenza, esponenziale e logaritmo che tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e' riassunto dalla

Proposizione 7 *(1) Ciascuna funzione esponenziale b^x ($b > 1$) tende a $+\infty$ piu' velocemente di ciascuna funzione potenza x^α ($\alpha > 0$)*

$$\frac{b^x}{x^\alpha} \to +\infty.$$

(2) ciascuna funzione potenza x^α ($\alpha > 0$) tende a $+\infty$ piu' velocemente di ciascuna funzione logaritmo $\log_b x$ ($b > 1$):

$$\frac{x^\alpha}{\log_b x} \to +\infty.$$

Usando i risultati sopra descritti si puo' iniziare a discutere qualche limite di una qualche complessita'. Consideriamo ad esempio la funzione che associa a ciascun x la potenza $x^{1/x}$ ($x > 0$). Si ha

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log x}{x}} \to e^0 = 1.$$

Limiti per x che tende a $-\infty$. Le definzioni e la teoria dei limiti per x che tende a $-\infty$ sono analoghe a quelle per x che tende a $+\infty$. Di seguito riportiamo una definizione, alcuni fatti, ed alcune parti della teoria.

Definizione 1 *Siano date una funzione $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ ed un numero reale l. Si dice che*

il limite di $f(x)$ per x che tende a $-\infty$ e' l

se e solo se

per ogni intorno $I_l(r)$ del punto l esiste un numero reale H tale che

$$f(x) \in I_l(r), \quad \text{per ogni } \; x < H.$$

In simboli:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \quad \text{se e solo se} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad \exists H \in \mathbb{R} :$$
$$|f(x) - l| < r, \quad \forall x < H$$

Le funzioni potenze, esponenziali e logaritmi

$$x^n, \quad x \in]-\infty, 0[\qquad (n \in \mathbb{Z}),$$
$$b^x, \quad x \in \mathbb{R} \qquad (b > 0),$$

per $x \to -\infty$ hanno il seguente comportamento

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ positivo pari} \\ -\infty & n \text{ positivo dispari} \\ 1 & n = 0 \\ 0^+ & n \text{ negativo pari} \\ 0^- & n \text{ negativo dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = \begin{cases} 0^+ & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ +\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

Si ha un teorema dei carabinieri per limiti per $x \to -\infty$.

L'operazione di limite per $x \to -\infty$ ha rispetto alle operazioni aritmetiche le stesse proprieta' dell'operazione di limite per per $x \to +\infty$.

L'operazione di limite per x che tende a $-\infty$ e' legata all'operazione di limite per x che tende a $+\infty$ dal seguente fatto

> Esiste il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$ se e solo se esiste il limite di $f(-x)$ per $x \to +\infty$, e in caso affermativo i due limiti sono uguali; in breve
>
> $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

Esempio Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0^-.$$