Spazi vettoriali

Basi. Dimensione.

La considerazione degli esempi principali di spazi vettoriali dati sopra suscita la domanda: esiste un analogo geometrico di $\mathbb{R}^n$ cosi′ come lo sono $\mathcal{G}^2$ per $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{G}^3$ per $\mathbb{R}^3$? La risposta e′ affermativa ... le parole chiave nelle quali e′ sviluppata sono "spazio vettoriale finitamente generato", "base", "coordinate", e "dimensione".

Sistema di generatori di uno spazio vettoriale.

Definizione 1 *Si dice che una sequenza di vettori* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *e′ un sistema di generatori per uno spazio vettoriale* V *se e solo se ogni vettore* $\mathbf{v}$ *di* V *si puo′ ottenere come combinazione lineare di* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$.

Osserviamo subito che

Proposizione 1 *Sia* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ *un sistema di generatori di uno spazio vettoriale* V*, e siano* $\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_p$ *vettori di* V*. Allora anche* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_p$ *e′ un sistema di generatori di* V.

Esplicitamente questa proposizione afferma che, sotto le ipotesi fatte, un qualsiasi $\mathbf{v}$ di V si puo′ ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_p$. Possiamo provarla come segue. Per ipotesi esistono degli scalari $r_1, \ldots, r_m$ tali che $\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m$, e si ha $\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m + 0\mathbf{v}_{m+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_p$.

Esempi

(1) Consideriamo il piano vettoriale geometrico $\mathcal{G}^2$ (fissato un punto O del piano, identifichiamo ciascun vettore con un segmento orientato uscente da O). Nessun vettore da solo puo′ essere un sistema di generatori di $\mathcal{G}^2$. Una qualsiasi sequenza di due o piu′ vettori, fra i quali ne compaiano due non allineati, e′ un sistema di generatori di $\mathcal{G}^2$.

(2) Consideriamo lo spazio vettoriale geometrico $\mathcal{G}^3$ (fissato un punto O dello spazio, identifichiamo ciascun vettore con un segmento orientato uscente da O). Nessuna sequenza di uno o due vettori puo′ essere un sistema di generatori di $\mathcal{G}^3$. Una qualsiasi sequenza di tre o piu′ vettori, fra i quali ne compaiano tre non complanari, e′ un sistema di generatori di $\mathcal{G}^3$.

(3) Consideriamo lo spazio vettoriale $3-$dimensionale standard $\mathbb{R}^3$. La sequenza dei tre vettori canonici

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1),$$

e′ un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$. Infatti dato un qualsiasi vettore $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ si ha

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$

Un po' piu' in generale, una qualsiasi sequenza di vettori di $\mathbb{R}^3$ contenente i tre vettori canonici ed altri vettori e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(4) Ci chiediamo se i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,2,4)$, $\mathbf{v}_2 = (1,3,9)$ generano $\mathbb{R}^3$; ci impegnamo a dare una risposta usando solo la defінzione. Un vettore $\mathbf{v} = (p,q,r)$ di $\mathbb{R}^3$ si puo' ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ se e solo se esistono due scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2.$$

Questa equazione lineare a coefficienti vettoriali equivale al sistema lineare a coefficienti scalari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= p \\ 2x_1 + 3x_2 &= q \\ 4x_1 + 9x_2 &= r \end{cases}, \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 &= p \\ x_2 &= q - 2p \\ 0 &= r - 5q + 6p \end{cases}$$

Dunque tutti i vettori $\mathbf{v} = (p,q,r)$ per i quali $r - 5q + 6p \neq 0$ non si possono scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Questi due vettori non sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Il fatto emerso nell'esempio (4) vale in generale, come stablito dalla seguente

Proposizione 2 *Nessuna sequenza di $m < n$ vettori di $\mathbb{R}^n$ e' sistema di generori per $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione (facoltativa). Siano dati m vettori

$$\mathbf{v}_1 = (v_{11}, \ldots, v_{n1}), \ \ldots, \ \mathbf{v}_m = (v_{1m}, \ldots, v_{nm})$$

di $\mathbb{R}^n$, con $m < n$. Un vettore $\mathbf{v} = (p_1, \ldots, p_n)$ si puo' scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ \ldots, \ \mathbf{v}_m$ se e solo se il seguente sistema lineare nelle incognite $x_1, \ldots, x_n$ ha soluzioni

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + \cdots + v_{1m}x_m &= p_1 \\ &\vdots \\ v_{n1}x_1 + \cdots + v_{nm}x_m &= p_n \end{cases} \tag{1}$$

Affermiamo che esiste una combinazione lineare non banale dei primi membri che ha un risultato identicamente nullo, cioe' che esistono $y_1, \ldots y_n$ non tutti nulli tali che

$$y_1(v_{11}x_1 + \cdots + v_{1m}x_m) + \cdots + y_n(v_{n1}x_1 + \cdots + v_{nm}x_m) = 0 \quad \forall x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}.$$

Infatti, questa equazione e' equivalente al sistema lineare omogeneo di m equazioni nelle n incognite $y_1, \ldots, y_n$

$$\begin{cases} v_{11}y_1 + \cdots + v_{n1}y_n = 0 \\ \vdots \\ v_{1m}y_1 + \cdots + v_{nm}y_n = 0 \end{cases}$$

ed essendo $m < n$ questo sistema ha almeno una soluzione non banale; indichiamo con $(c_1, \ldots, c_n)$ una tale soluzione.
Ora, combinando linearmente le equazioni del sistema (1) con i coefficienti $c_1, \ldots, c_n$ otteniamo l'equazione

$$c_1(v_{11}x_1 + \cdots + v_{1m}x_m) + \cdots + c_n(v_{n1}x_1 + \cdots + v_{nm}x_m) = c_1p_1 + \cdots + c_np_n,$$

che ha il primo membro nullo, e dunque porge

$$0 = c_1p_1 + \cdots + c_np_n.$$

Dunque i vettori $\mathbf{v} = (p_1, \ldots, p_n)$ che non soddisfano questa condizione non si possono ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Di vettori che non soddisfano la condizione ce ne sono poiche' i coefficienti $c_1, \ldots, c_n$ non sono tutti nulli.

Base di uno spazio vettoriale.

Definizione 2 *Si dice che una sequenza $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di vettori di uno spazio vettoriale V e' una base di V se e solo se*
-e' linearmente indipendente;
-genera V.

Esempi
(1) Consideriamo il piano vettoriale geometrico $\mathcal{G}^2$ (fissato un punto O del piano, identifichiamo ciascun vettore con un segmento orientato uscente da O). Una qualsiasi sequenza di due vettori non allineati e' una base di $\mathcal{G}^2$; tutte le basi di $\mathcal{G}^2$ sono di questo tipo.
(2) Consideriamo lo spazio vettoriale geometrico $\mathcal{G}^3$ (fissato un punto O dello spazio, identifichiamo ciascun vettore con un segmento orientato uscente da O). Una qualsiasi sequenza di tre vettori non complanari e' una base di $\mathcal{G}^3$; tutte le basi di $\mathcal{G}^3$ sono di questo tipo.
(3) La sequenza degli n vettori canonici

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \mathbf{e}_3 = (0, \ldots, 0, 1),$$

di $\mathbb{R}^n$ e' una base di $\mathbb{R}^n$.

Dalle proposizioni stabilite sui vettori linearmente indipendenti e sui sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$ segue la

Proposizione 3 *Ciascuna base di $\mathbb{R}^n$ e' una sequenza di n vettori.*

Spazi generati da un numero finito di vettori di un dato spazio Data una sequenza di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di uno spazio vettoriale V, consideriamo l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle = \{ \sum_{i=1}^{m} r_i \mathbf{v}_i; \quad r_i \in \mathbb{R} \}.$$

Osserviamo che

(1) ciascun vettore $\mathbf{v}_i$ si puo' ottenere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$;

(2) la somma di due combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ e' ancora una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$; infatti:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{m} s_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m} (r_i + s_i) \mathbf{v}_i;$$

in breve, diciamo che l'insieme $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$ e' chiuso rispetto alla somma;

(3) il prodotto di uno scalare per una combinazione lineari dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ e' ancora una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$; infatti:

$$s \sum_{i=1}^{m} r_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m} (s r_i) \mathbf{v}_i;$$

in breve, diciamo che l'insieme $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$ e' chiuso rispetto al prodotto per scalari.

Completando queste osservazioni, si giunge a provare la

Proposizione 4 *Data una sequenza di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di uno spazio vettoriale V, l'insieme $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$ di tutte le loro combinazioni lineari, dotato delle operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori presenti in V, e' uno spazio vettoriale, che si dice spazio generato da $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ in V.*

Esempio. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, lo spazio $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_5 \rangle$ generato dai vettori

$$\mathbf{v_1} = (1,0,1,1),\ \mathbf{v_2} = (2,0,2,2),\ \mathbf{v_3} = (1,1,0,1),\ \mathbf{v_4} = (2,1,1,2),\ \mathbf{v_5} = (0,1,-1,1)$$

e' l'insieme dei vettori del tipo

$$r_1(1,0,1,1) + r_2(2,0,2,2) + r_3(1,1,0,1) + r_4(2,1,1,2) + r_5(0,1,-1,1) =$$
$$(r_1 + 2r_2 + r_3 + 2r_4, r_3 + r_4 + r_5, r_1 + 2r_2 + +r_4 - r_5, r_1 + 2r_2 + r_3 + 2r_4 + r_5)$$

ottenuti al variare di $r_1, r_2, \ldots, r_5$ in $\mathbb{R}$.

Teorema 1 *Da ciascun sistema finito di generatori di uno spazio vettoriale V si puo' estrarre una base di V.*

Idea della dimostrazione.
Sia data una sequenza di m vettori di V che genera V. Se questa sequenza e' anche linearmente indipendente, allora e' una base di V. Supponiamo dunque che questa sequenza sia linearmente dipendente; cio' significa che in essa compare un vettore che si puo' ottenere come combinazione lineare degli altri; cancellando questo vettore si ottiene una sequenza di $m-1$ vettori di V che genera V.
Se questa sequenza e' anche linearmente indipendente, allora e' una base di V. Supponiamo dunque che questa sequenza sia linearmente dipendente; cio' significa che in essa compare un vettore che si puo' ottenere come combinazione lineare degli altri; cancellando questo vettore si ottiene una sequenza di $m-2$ vettori di V che genera V.
... Dopo al piu' m passi si otterra' una base di V.

Esempio. Con riferimento all'esempio precedente, osservando che: (1) $\mathbf{v}_2$ si puo' ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$; (2) $\mathbf{v}_4$ si puo' ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$; (3) $\mathbf{v}_5$ si puo' ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$; (4) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ e' linearmente indipendente; si trova che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ e' una base dello spazio V. In particolare, si ha che lo spazio V coincide con lo spazio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle$, che a sua volta e' l'insieme dei vettori del tipo

$$r_1(1,0,1,1) + r_3(1,1,0,1) = (r_1 + r_3, r_3, r_1, r_1 + r_3)$$

ottenuti al variare di r_1, r_3 in $\mathbb{R}$.

Coordinate. Una base in uno spazio vettoriale e' un sistema di riferimento, nel senso della seguente

Proposizione 5 *Sia $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ una base di uno spazio vettoriale V. Allora ogni vettore $\mathbf{v}$ di V si puo' ottenere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

$$\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m;$$

i coefficienti $r_1, \ldots, r_m$ si dicono coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto ai vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ della base.

Dimostrazione. Da una parte, essendo la sequenza $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ un sistema di generatori di V, si ha che $\mathbf{v}$ si puo' ottenere in almeno un modo come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$. Dall'altra, date due scritture

$$\mathbf{v} = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_m\mathbf{v}_m, \quad \mathbf{v} = s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_m\mathbf{v}_m$$

di $\mathbf{v}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$, sottraendo membro a membro si ha una scrittura

$$\mathbf{0} = (r_1 - s_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (r_m - s_m)\mathbf{v}_m$$

di $\mathbf{0}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$; essendo questa sequenza linearmente indipendente, si ha

$$r_1 - s_1 = 0, \ \ldots, \ r_m - s_m = 0$$

cioe' $r_1 = s_1$, ... $r_m = s_m$.

Si ha inoltre la

Proposizione 6 *Sia* $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ *una base di uno spazio vettoriale* V*. Allora la funzione*

$$\psi : \ V \to \mathbb{R}^n, \quad \psi : \ \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} r_i \mathbf{v}_i \ \mapsto (r_i)_{i=1}^{m}$$

e' una biiezione, compatibile con le operazioni di somma di vettori e di prosotto di scalari per vettori presenti in V *e* $\mathbb{R}^n$*, cioe'*

$$\psi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \psi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v}), \quad \psi(r\mathbf{u}) = r\psi(\mathbf{u})$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *in* V *ed ogni* $r \in \mathbb{R}$.

Esempio. Con riferimento all'esempio precedente, lo spazio vettoriale V puo' essere identificato, mediante la scelta della base, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ con lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^2$. L'identificazione e' data dalla una funzione

$$\psi : V \to \mathbb{R}^2$$

che associa ad ogni vettore di V le sue due coordinate rispetto ai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$. In particolare, si ha

$$\psi(\mathbf{v}_1) = (1,0),\ \psi(\mathbf{v}_2) = (2,0),\ \psi(\mathbf{v}_3) = (0,1),\ \psi(\mathbf{v}_4) = (1,1),\ \psi(\mathbf{v}_5) = (-1,1),$$