Limiti.

Limite di una funzione per x che tende a $+\infty$, $-\infty$.

Risoluzione di alcuni esercizi dati la settimana precedente.

Limite di una funzione per x che tende a c, $c \in \mathbb{R}$

Premessa. Lo stile di questa premessa e' volutamente informale. Data una funzione $f(x)$ definita in un intorno di un punto c, ma non necessariamente definita in $x = c$, si possono considerare i valori di $f(x)$ per valori di x che via via si avvicinano a c e si puo' immaginare di proseguire indefinitamente in questa azione. Ad esempio:

(1) Consideriamo nel piano una circonferenza di raggio unitario e su di essa due punti non diametralmente opposti; questi due punti dividono la circonferenza in due archi, consideriamo l'arco minore minore e la corda che lo sottende; viene da dire che per valori della lunghezza dell'arco che via via si avvicinano a zero (escluso il valore zero) il rapporto fra la lunghezza della corda e la lunghezza dell'arco tende al valore limite uno. In altri termini, indicata con $2t$ la lunghezza della corda ($t > 0$), si ha che la lunghezza dell'arco e' $2\sin t$ e viene da dire che via via che il valore di t si avvicina a 0 (0 escluso), il rapporto $\frac{2\sin t}{2t} = \frac{\sin t}{t}$ tende al valore limite 1.

(2) Consideriamo la funzione $\frac{1}{x^2}$, ($x \neq 0$). Viene da dire che per valori di x che via via si avvicinano a zero, i corrispondenti valori di $\frac{1}{x^2}$ diventano indefinitamente grandi, e che la funzione $\frac{1}{x^2}$ tende $+\infty$.

(3) Consideriamo la funzione x^2, ($x \in \mathbb{R}$). Viene da dire che per valori di x che via via si avvicinano a un certo valore c, i corrispondenti valori di x^2 via via si avvicinano al valore c^2.

Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a c, con $c \in \mathbb{R}$ Il concetto che stiamo per definire si riferisce al comportamento di una funzione nelle vicinanze di un dato punto c, ma non nel punto c; e' ammesso che la funzione non sia definita in c, e se la funzione e' definita in c si fa come se non lo fosse. Notazioni per gli intorni di un punto c privati del centro:

$$I_c(r) - \{c\} = \dot{I}_c(r), \quad I_c - \{c\} = \dot{I}_c.$$

(esplicitamente si ha: $I_c(r) =]c - r, c + r[$ e $\dot{I}_c(r) =]c - r, c[\cup]c, c + r[$)

Definizione 1 *Siano $f : \dot{I}_c \to \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c e' l se e solo se*

per ogni intorno $I_l(r)$ di l esiste un intorno $I_c(s)$ tale che

$$f(x) \in I_l(r) \ \text{per ogni} \ x \in \dot{I}_c(s).$$

In breve: $\lim_{x\to c} f(x) = l$ *se e solo se*

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \quad \exists s \in R^+ :$$
$$|f(x) - l| < r, \quad \text{per } 0 \neq |x - c| < s$$

Definizione 2 *Sia* $f : \dot{I}_c \to \mathbb{R}$. *Si dice che il limite di* $f(x)$ *per* x *che tende a* c *e'* $+\infty$ *se e solo se*

> *per ogni* $M \in \mathbb{R}$ *esiste un intorno* $I_c(s)$ *tale che*
> $$f(x) > M \;\; \text{per ogni} \;\; x \in \dot{I}_c(s).$$

In breve: $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ *se e solo se*

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists s \in R^+ :$$
$$f(x) > M, \quad \text{per } 0 \neq |x - c| < s.$$

In modo analogo si da la definizione di limite $-\infty$ di una funzione $f(x)$ per $x \to c$. Queste definizioni si possono esprimere nei termini del grafico della funzione. Ad esempio, la prima definizione si puo' esprimere come segue. Il limite di $f(x)$ per x che tende a c e' l se e solo se

> per ogni striscia orizzontale
> $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad l - r < y < l + r\}$$
> di semiampiezza $r > 0$ centrata sulla retta $y = l$, esiste un intorno $I_c(s)$ di semiampiezza $s > 0$ centrato nel punto c, tale che il grafico della restrizione della funzione f all'intorno bucato $\dot{I}_c(s)$ sia contenuto nella striscia.

Esempi

(1) Si dimostra che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
(2) Si verifica facilmente che
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$
(3) Si verifica facilmente che
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \;\; \text{non esiste.}$$
(4) Si verifica facilmente che per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{x\to c} x^2 = c^2.$$

Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a c^- e c^+. Notazioni per i semiintorni di un punto c privati del centro:

$$I_c^+(r) - \{c\} = \dot{I}_c^+(r), \quad I_c^+ - \{c\} = \dot{I}_c^+.$$

(esplicitamente, si ha $I_c^+(r) = [c, c+r[$ e $\dot{I}_c^+(r) =]c, c+r[$).

Definizione 3 *Siano $f : \dot{I}_c^+ \to \mathbb{R}$ e $l \in \mathbb{R}$. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c^+ e' l se e solo se*

per ogni intorno $I_l(r)$ di l esiste un semintorno $I_c^+(s)$ tale che

$$f(x) \in I_l(r) \text{ per ogni } x \in \dot{I}_c^+(s).$$

In breve: $\lim_{x \to c^+} f(x) = l$ *se e solo se*

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \quad \exists s \in R^+ :$$
$$|f(x) - l| < r, \quad \text{per } c < x < c + s$$

In modo analogo si danno le definizioni di limite $+\infty$ e $-\infty$ per $x \to c^+$, e le definzioni di limite finito l, $+\infty$ e $-\infty$ per $x \to c^-$.

Esempi

(1) Si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

(2) Si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 0^+.$$

Proposizione 1 *Per ogni funzione $f : \dot{I}_c \to \mathbb{R}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
(1) esiste $\lim_{x \to c} f(x)$;
(2) esistono e sono uguali $\lim_{x \to c^-} f(x)$ *e* $\lim_{x \to c^+} f(x)$
Inoltre, nel caso affermativo si ha che
$\lim_{x \to c} f(x)$ *e' uguale al valore comune di* $\lim_{x \to c^-} f(x)$ *e* $\lim_{x \to c^+} f(x)$.