Limiti

Limite di una funzione per x che tende a c, $c \in \mathbb{R}$

Limiti elementari e altri esempi. Consideriamo i limiti delle funzioni $f(x)$ potenza, esponenziale, logaritmo, e trigonometriche per x che tende a un punto limite c. Distinguiamo due casi:

(1) funzioni $f(x)$ e punti c non appartenenti al dominio naturale di $f(x)$, per i quali abbia senso il limite di $f(x)$ per $x \to c$. Si hanno le seguenti funzioni e punti limite

Funzioni potenza. Funzioni potenza ad esponente intero negativo

$$f(x) = x^{-n}, \quad x \neq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

e punto limite $c = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} x^{-n} &= +\infty \qquad (n \text{ pari}) \\ \lim_{x \to 0^-} x^{-n} &= -\infty, \qquad (n \text{ dispari}) \\ \lim_{x \to 0^+} x^{-n} &= +\infty \qquad (n \text{ dispari}) \end{aligned}$$

Funzioni potenza ad esponente irrazionale negativo

$$f(x) = x^{-\alpha}, \quad x > 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^+)$$

e punto limite $c = 0$. Si ha

$$\lim_{x \to 0} x^{-\alpha} = +\infty.$$

Non ci sono altri casi al di fuori di questi (le funzioni potenza con esponente intero naturale o razionale con denominatore dispari hanno dominio naturale $\mathbb{R}$; quelle con esponente razionale con denominatore pari hanno dominio naturale $[0, +\infty[$, e per i punti non appartenenti a questo dominio non ha senso il limite)

Funzioni logaritmo

$$f(x) = \log_b x, \quad x \in]0, +\infty[\qquad (0 < b \neq 1)$$

e punto limite $c = 0$ (per gli atri punti non appartenenti al dominio naturale non ha senso il limite). Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \log_b x &= -\infty \qquad (\text{per } \ b > 1) \\ \lim_{x \to 0^+} \log_b x &= +\infty \qquad (\text{per } \ 0 < b < 1) \end{aligned}$$

Funzione tangente

$$f(x) = \tan x, \quad x \notin \{\frac{2k+1}{2}\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\} \qquad (0 < b \neq 1)$$

e punti limite $c \in \{\frac{2k+1}{2}\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Si ha

$$\lim_{x \to \left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^+} \tan x = -\infty$$

(si determinano i limiti nel caso $c = \frac{\pi}{2}$ e si deducono gli altri per periodicita').

(2) funzioni $f(x)$ e punti c appartenenti al dominio naturale di $f(x)$, per i quali abbia senso il limite di $f(x)$ per $x \to c$. Si hanno la seguente

Proposizione 1 *Per qualsiasi $f(x)$ funzione potenza, esponenziale, logaritmo, trigonometrica e per qualsiasi punto c del suo dominio naturale, il limite di $f(x)$ per $x \to c$ ha senso ed e' uguale alla valutazione $f(c)$ di f in c :*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Altri esempi
(1) Si ha

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

(questa affermazione si puo' motivare osservando che $-x \leq \ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ \leq x$ per ogni $x \neq 0$ ...)

(2) Per la funzione parte intera si ha

$$\lim_{x \to 1^-} [x] = 0, \quad \lim_{x \to 1^+} [x] = 1.$$

(3) Per la funzione

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$$

si ha

$$\lim_{x \to 0} \delta_0(x) = 0.$$

Vari limiti. Proprieta'. Relazioni. Abbiamo dunque definito la nozione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a un valore limite di x, dove sia il valore limite di x che il limite di $f(x)$ possono essere $-\infty$, c^-, c, c^+ ($c \in \mathbb{R}$) o $+\infty$ (sotto le dovute condizioni sulla relazione fra il valore limite di x e il dominio di f). A volte al posto di dire che "il limite di $f(x)$ per x che tende a ... e' ..." e di scrivere $\lim_{x \to \ldots} f(x) = \ldots$ si dice che "$f(x)$ tende a ... per x che tende a ..." e si scrive $f(x) \to \ldots$ per $x \to \ldots$ Tutte le proposizioni enunciate per il caso in cui x tende a $+\infty$ o $-\infty$ si estendono agli altri casi. In particolare, si estendono:

-le proposizioni sul comportamento dell'operazione di limite rispetto alle operazioni aritmetiche (somma, sottrazione, prodotto, divisione, potenza);

-i teoremi dei carabinieri.

Le varie operazioni di limite sono tutte legate fra di loro dalle relazioni

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to 0} f(c+x)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Esempio. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

cosi' l'affermazione che uno dei due limiti sia 0 e' equivalente all'affermazione che l'altro limite sia 0.

Funzioni continue.

Definizione 1 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, con $a \neq b$.*
-Si dice che f e' continua in un punto $c \in [a,b]$ se e solo se

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

-Si dice che f e' continua su $[a,b]$ se e solo se f e' continua in ogni $c \in [a,b]$.

Esempi.

(1) Ciascuna funzione potenza, esponenziale, logaritmo, trigonometrica e' continua sul suo dominio naturale.

(2) La funzione valore assoluto e' continua su $\mathbb{R}$.

(3) La seguente funzione e' continua su $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

(3) La funzione

$$\delta_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = c \\ 0 & \text{per } x \neq c \end{cases} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ fissato})$$

non e' continua in c.
(4) La funzione parte intera $[x]$ ($x \in \mathbb{R}$) non e' continua in 1.
(5) Nessuna funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ a & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ fissato})$$

e' continua in 0.

Proprieta' Dalle proprieta' dell'operazione di limite rispetto alle operazioni aritmetiche segue che la continuita' e' preservata dalle operazioni aritmetiche sulle funzioni:

Proposizione 2 *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $a \neq b$.*
- Se le funzioni f, g sono continue in un punto $c \in [a, b]$, allora anche le funzioni $f \pm g, fg, f/g$ sono continue in $c \in [a, b]$.
- Se le funzioni f, g sono continue su $[a, b]$, allora anche le funzioni $f \pm g, fg, f/g$ sono continue su $[a, b]$.

La continuita' e' preservata anche dall'operazione di composizione di funzioni:

Proposizione 3 *Siano date due funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ (con $a \neq b$ e $c \neq d$) tali che $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ e sia $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione composta g dopo f.*
-Se f e' continua in $c \in [a, b]$ e g e' continua in $f(c) \in [c, d]$, allora $g \circ f$ e' contiua in c.
-Se f e' continua su $[a, b]$ e g e' continua su $f([a, b]) \subseteq [c, d]$, allora $g \circ f$ e' contiua in $[a, b]$.

Dal fatto che ciascuna funzione potenza, esponenziale, logaritmo, trigonometrica e' continua sul suo dominio naturale, e che la continuita' e' preservata dalle operazioni aritmetiche e composizione di funzioni segue che

Proposizione 4 *Ciascuna funzione elementare e' continua sul suo dominio naturale.*

In particolare si ha che ogni funzione polinomiale e' continua su $\mathbb{R}$, ed ogni funzione razionale $p(x)/q(x)$ e' continua su $\mathbb{R}$ privato delle radici di $q(x)$.

Teorema dei valori intermedi L'idea informale di continuita' di una funzione su un intervallo e' precisata dal

Teorema 1 (Teorema dei valori intermedi) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a \neq b$) continua su $[a, b]$. Allora per ogni y^* nell'intervallo di estremi $f(a)$ e $f(b)$ esiste almeno un x^* in $[a, b]$ tale che $f(x^*) = y^*$.*

Una conseguenza importante di questo teorema e' data dal

Teorema 2 (Teorema degli zeri) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a \neq b$) continua su $[a, b]$. Se $f(a)$ ed $f(b)$ sono uno maggiore di zero e l'altro minore di zero, allora esiste almeno un x^* in $[a, b]$ tale che $f(x^*) = 0$.*

Questo teorema puo' essere usato per determinare una soluzione, approssimata quanto si vuole, di un'equazione. Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 6 = 0;$$

ci chiediamo se ha qualche soluzione. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 6.$$

Si ha che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

dunque esistono due valori $a < b$ in $\mathbb{R}$ tali che $f(a) < 0 < f(b)$; per tentativi troviamo che $f(1) = -5$ e $f(2) = 8$. Inoltre f e' continua su $\mathbb{R}$. Dunque la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri sull'intervallo $[1,2]$, ed esiste un x^* con $1 < x^* < 2$ tale che $f(x^*) = 0$. In altri termini, l'equazione data ha almeno una soluzione compresa fra 1 e 2.

Ora, si ha che $f(3/2) = -3/8$. Dunque possiamo applicare il teorema degli zeri alla funzione f sull'intervallo $[3/2, 2]$ ed ottenere che l'equazione ha almeno una soluzione in questo intervallo. Si puo' allora proseguire ...