Limiti

Qualche primo studio di funzione. Considerazioni qualitative sui possibili grafici delle funzioni polinomiali di III grado

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad (a > 0)$$

in funzione del numero delle loro radici, usando il fatto che $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, che $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ e che $p(x)$ e' una funzione continua.

Studio della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4};$$

studio della funzione $|f(x)|$.

Limiti notevoli

Proposizione 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(Ricordiamo che per convenzione abbiamo posto $\log x = \log_e x$, dove e e' il numero di Nepero).

In altri termini, la proposizione afferrma che:

> le funzioni $e^x - 1$, $\log(1 + x)$, $\sin x$ sono asintotiche a x per $x \to 0$.

Come vedremo in seguito, a questo fatto corrisponde il fatto che le linee $y = e^x - 1$, $y = \log(1 + x)$, e $y = \sin x$ hanno tutte in $(0, 0)$ la stessa tangente $y = x$.

Numeri reali estesi Si dice insieme dei numeri reali estesi e si denota con $\mathbb{R}^*$ l'insieme ottenuto aggiungendo all'insieme dei numeri reali i simboli $-\infty$ e $+\infty$; in simboli

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Si dicono intorni in $\mathbb{R}^*$ di un punto $c \in \mathbb{R}^*$ gli usuali intorni di c se $c \in \mathbb{R}$; si dicono intorni in $\mathbb{R}^*$ di $-\infty$ gli insiemi del tipo $]-\infty, a[\cup \{-\infty\}$; si dicono intorni in $\mathbb{R}^*$ di $+\infty$ gli insiemi del tipo $]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Con queste convenzioni, tutte le definizioni di limite si possono esprimere nella forma seguente

> Sia $f(x)$ una funzione definita almeno in un intorno di un un punto $c \in \mathbb{R}^*$ privato di c, e sia $l \in \mathbb{R}^*$. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c e' l se e solo se per ogni intorno I_l di l esiste un intorno I_c di c tale che $f(x) \in I_l$ per ogni $x \in I_c$ con $x \neq c$.

Cosi' come $\mathbb{R}$ si puo' identificare con l'insieme dei punti di una retta, l'insieme $\mathbb{R}^*$ si puo' identificare con l'insieme dei punti di una semicirconferenza con estremi inclusi. Lo descriviamo di seguito in modo leggermente informale. Date una retta orientata r ed una semicirconferenza σ con estremi esclusi, tali che σ sia tangente ad r in un punto O e il diametro congiungente gli estremi di σ sia parallelo ad r, ed indicato con C il centro di σ, si ha una biiezione $\psi : r \to \sigma$ che associa ad ogni punto P di r l'intersezione della retta PC con σ. Si noti che: (1) se il punto P si allontana via via dal punto O nel verso di r, allora il punto $\psi(P)$ si avvicina via via ad un estremo E_+ di σ; (2) se il punto P si allontana via via dal punto O nel verso opposto, allora il punto $\psi(P)$ si avvicina via via all'altro estremo E_- di σ. Cio' suggerisce di estendere la biiezione ψ ad una biiezione $\psi^* : r^* \to \sigma^*$ dall'insieme $r^* = r \cup \{P_{+\infty}, P_{-\infty}\}$ (ottenuto aggiungendo ad r due "punti all'infinito") all'insieme $\sigma^* = \sigma \cup \{E_+, E_-\}$ (ottenuto aggiungendo a σ i suoi due estremi) ponendo $\psi^*(P_{+\infty}) = E_+$ e $\psi^*(P_{-\infty}) = E_-$.

Limiti, composizione di funzioni, cambiamento di variabili Le relazioni date fra i vari limiti (cfr Lezione scorsa) possono essere interpretate come cambiamneti di variabili:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{y\to+\infty} f(-y) \qquad (y=-x);\\
\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{y\to 0} f(c+y) \qquad (y=x-c);\\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{y\to+\infty} f(1/y) \qquad (y=1/x)\\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{y\to-\infty} f(1/y) \qquad (y=1/x)
\end{aligned}$$

Piu' in generale si ha:

Proposizione 2 *Sia data una funzione h definita almeno in un intorno di un punto $c \in \mathbb{R}^*$ privato di c. Si supponga che*
(1) si possa scrivere

$$h(x) = g(f(x)),$$

essendo f una funzione definita almeno in un intorno di c privato di c;
(2) esista

$$\lim_{x\to c} f(x) = l, \qquad (l \in \mathbb{R}^*);$$

(3) la funzione g sia definita almeno in un intorno di l privato di l ed esista

$$\lim_{y\to l} g(y) = m, \qquad (m \in \mathbb{R}^*).$$

Allora, a meno che g sia definita e discontinua in l, si ha

$$\lim_{x\to c} h(x) = \lim_{x\to c} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y) = m.$$

Esempi (uso del cambiamento di variabili)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log 2}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\log 2\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\log 2 \qquad (y=x\log 2)\\ &= 1\cdot\log 2=\log 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}x\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}\sqrt{y} \qquad (y=x^2)\\ &= 1\cdot 0=0\end{aligned}$$

Esempio (senza la condizione su g la proposizione e' falsa). Consideriamo la funzione

$$h:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\quad h(x)=\delta_3(3+x\sin(\pi/x)),$$

dove

$$\delta_3(y)=\begin{cases}1 & \text{se } y=3\\ 0 & \text{se } y\neq 3.\end{cases}.$$

Da una parte si ha

$$\lim_{x\to 0}(3+x\sin(\pi/x))=3,\quad \lim_{y\to 3}\delta_3(y)=0.$$

Dall'altra parte si ha

$$\delta_3(3+x\sin(\pi/x))=\begin{cases}1 & \text{se } x=\pm 1,\ \pm 1/2,\ \pm 1/3,\dots\\ \text{non definita} & \text{se } x=0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to 0}\delta_3(3+x\sin(\pi/x)) \qquad \text{non esiste.}$$

Dunque non e' vero che

$$\lim_{x\to 0}\delta_0(3+x\sin(\pi/x))=\lim_{y\to 3}\delta_3(y).$$

Funzioni continue, monotonocita' e iniettivita' Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a \neq b)$. Se f e' strettamente monotona su $[a,b]$ allora f e' iniettiva su $[a,b]$; ci si chiede se vale in viceversa ... La risposta e' negativa, ad esempio la funzione

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ x & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

e' iniettiva (anzi biiettiva) ma non e' monotona. Vale pero' la

Proposizione 3 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a \neq b)$, continua su $[a,b]$. f e' iniettiva se e solo se f e' strettamente monotona crescente oppure strettamente monotona decrescente.*

Dimostrazione (idea). Proviamo la parte non banale dell'enunciato, cioe' "se f e' iniettiva, allora f e' strettamente monotona crescente oppure strettamente monotona decrescente". Proviamo in realta' la contronominale "se f non e' ne' monotona crescente ne' monotona decrescenta, allora f non e' iniettiva". Infatti, se f non e' ne' monotona crescente ne' monotona decrescente allora esistono tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ in $[a,b]$ tali che $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ oppure $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. In entrambe i casi, si trovano due punti distiniti nei quali f assume lo stesso valore. Ad esempio, nel primo caso $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ si procede come segue (nel secondo caso si procede in modo analogo). Sia $y^* \in \mathbb{R}$ tale che

$$\max\{f(x_1), f(x_2)\} < y^* < f(x_2);$$

per il teorema dei valori intermedi, si ha:
da $f(x_1) < y^* < f(x_2)$ segue che esiste un x_{12}^* con $x_1 < x_{12}^* < x_2$ tale che $f(x_{12}^*) = y^*$;
da $f(x_3) < y^* < f(x_2)$ segue che esiste un x_{23}^* con $x_2 < x_{23}^* < x_3$ tale che $f(x_{23}^*) = y^*$;
dunque si ha $x_{12}^* \neq x_{23}^*$ e $f(x_{12}^*) = f(x_{23}^*)$.