Spazi vettoriali

Dimensione. Rango.

Insiemi linearmente indipendenti, generatori, basi. Osserviamo che:

(1) La proprieta' "la sequenza di vettori ... e' linearmente indipendente" e' invariante rispetto ai riordinamenti dei vettori, e puo' sussistere solo se nella sequenza non compaiono vettori ripetuti.

(2) La proprieta' "la sequenza di vettori ... genera lo spazio vettoriale ..." e' invariante rispetto ai riordinamenti dei vettori, e rispetto alla cancellazione di eventuali ripetizioni di uno stesso vettore.

Cio' suggerisce di estendere la definizione di queste proprieta', e quelle ad esse riconducibili, ad insiemi di vettori. In particolare:

(1) diciamo che un insieme finito A di vettori di uno spazio vettoriale V e' linearmente indipendente se e solo se nessun vettore $\mathbf{a} \in A$ si puo' ottenere come combinazione lineare degli altri vettori $A - \{\mathbf{a}\}$ di A; questa proprieta' equivale alla proprieta' che l'equazione

$$\sum_{\mathbf{a} \in A} x_{\mathbf{a}} \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

nella famiglia di incognite scalari $x_{\mathbf{a}}$ ($\mathbf{a} \in A$) abbia solo la soluzione banale $x_{\mathbf{a}} = 0$ per ogni $\mathbf{a} \in A$.

(2) diciamo che un insieme finito A di vettori genera uno spazio vettoriale V se e solo se ogni $\mathbf{v} \in V$ si puo' ottenere come combinazione lineare

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{a} \in A} r_{\mathbf{a}} \mathbf{a}$$

dei vettori di A ($r_{\mathbf{a}}$ ($\mathbf{a} \in A$) opportuna famiglia di scalari).

(3) diciamo che un insieme finito B di vettori e' una base di uno spazio vettoriale V se e solo se B e' linearmente indipendente e B genera V.

Basi di $\mathbb{R}^n$, esempi. Una base dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^3$ e' data dalla sequenza dei vettori canonici $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Piu' in generale, una sequenza di tre vettori del tipo

$$\mathbf{a} = (a_1, 0, 0), \ \mathbf{b} = (b_1, b_2, 0), \ \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3),$$

sotto la condizione $a_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$ e $c_3 \neq 0$, e' sempre una base di $\mathbb{R}^3$. Di seguito verifichiamo questa affermazione usando solo la definizione di base di uno spazio vettoriale.

Verifichiamo che la sequenza $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e' lineramente indipendente. Consideriamo l'equazione

$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$

nelle incognite scalari α, β, γ. Osserviamo che:
uguagliando la terze componenti dei due membri si ha l'equazione $c_3\gamma = 0$ che sotto la condizione $c_3 \neq 0$ porge $\gamma = 0$; l'equazione si riduce dunque a
$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$;
uguagliando la seconde componenti dei due membri si ha l'equazione $b_2\beta = 0$ che sotto la condizione $b_2 \neq 0$ porge $\beta = 0$; l'equazione in questione si riduce dunque a
$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
che sotto la condizione $a_1 \neq 0$ porge $\alpha = 0$.

Verifichiamo che la sequenza $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ genera $\mathbb{R}^3$. Per ciascun vettore $\mathbf{v} = (p, q, r)$ di $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'equazione
$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{v}$
nelle incognite scalari α, β, γ. Uguagliando le componenti dei due membri si ha il sistema lineare

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma &= p \\ b_2\beta + c_2\gamma &= q \\ c_3\gamma &= r \end{cases}$$

Questo sistema triangolare, sotto le condizioni $a_1, b_2, c_3 \neq 0$, ha soluzione (una ed una sola soluzione).

Piu' in generale, fissato un intero positivo n, si ha che una sequenza di n vettori del tipo

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots, a_{nn}),$$

sotto la condizione $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$, e' sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

Dimensione di uno spazio vettoriale Abbiamo visto che ciascuno spazio vettoriale V finitamente generato su $\mathbb{R}$ possiede una base, e che, fissata una sequenza $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ base di V, associando a ciscun vettore di V la sequenza delle sue coordinate rispetto alla base si ottiene una biiezione da V ad uno spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^m$

$$\psi : V \to \mathbb{R}^m, \quad \psi : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} r_i\, \mathbf{v}_i \ \mapsto (r_i)_{i=1}^{m}$$

che e' compatibile con le operazioni di spazio vettoriale in V ed in $\mathbb{R}^m$, cioe'

$$\psi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \psi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v}), \quad r\psi(\mathbf{v}) = r\psi(\mathbf{v}),$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in V ed ogni r in $\mathbb{R}$. Questa funzione permette di identificare gli spazi vettoriali V ed $\mathbb{R}^m$: ciascuna proposizione esprimibile in termini di algebra vettoriale e' valida in V se e solo se e' valida in $\mathbb{R}^m$. In particolare, poiche' ogni base di $\mathbb{R}^m$ e' formata da m vettori, si ha anche che ogni base di V e' formata da m vettori. Possiamo esprimere questo risultato nella forma

Teorema 1 *Tutte le basi di uno stesso uno spazio vettoriale V fintamente generato su $\mathbb{R}$ sono formate dallo stesso numero di vettori.*

Questo Teorema permette di dare la seguente

Definizione 1 *Sia V uno spazio vettoriale fintamente generato su $\mathbb{R}$. Si dice* dimensione *di V e si indica con* $\dim(V)$ *la cardinalita' di un qualsiasi insieme base B di V, si pone cioe'* $\dim(V) = |B|$.

Spazio riga, spazio colonna e rango di una matrice.

Definizione 2 *Sia M una matrice ad elementi in $\mathbb{R}$ con m righe $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ ed n colonne $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$*

$$M = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{array}\right]$$

Lo spazio generato dalle righe di M in $\mathbb{R}^n$ si dice spazio riga *di M e si indica con $\mathcal{R}(M)$, e lo spazio generato dalle colonne di M in $\mathbb{R}^m$ si dice* spazio colonna *di M e si indica con $\mathcal{C}(M)$:*

$$\mathcal{R}(M) = \langle \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{C}(M) = \langle \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Esempio Data la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha

le righe di M sono $\mathbf{r}_1 = (1,2,1,2,0)$, $\mathbf{r}_2 = (0,0,1,1,1)$, $\mathbf{r}_3 = (1,2,0,1,-1)$, $\mathbf{r}_4 = (1,2,1,2,0)$, e lo spazio riga di M e'

$$\mathcal{R}(M) = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 \rangle.$$

le colonne di M sono $\mathbf{c}_1 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{c}_2 = (2,0,2,2)$, $\mathbf{c}_3 = (1,1,0,1)$, $\mathbf{c}_4 = (2,1,1,2)$, $\mathbf{c}_5 = (0,1,-1,0)$, e lo spazio colonna di M e'

$$\mathcal{C}(M) = \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5 \rangle.$$

Osserviamo che:

(1) dall'insieme delle righe di M si puo' estrarre una base di $\mathcal{R}(M)$, ad esempio $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ (si provi questa affermazione), dunque si ha $\dim\mathcal{R}(M) = 2$.

(2) dall'insieme delle colonne di M si puo' estrarre una base di $\mathcal{C}(M)$, ad esempio $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3\}$ (cfr. Lezione XII-2) dunque si ha $\dim\mathcal{C}(M) = 2$.

Nell'esempio abbiamo determinato la dimensione dello spazio riga $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ della matrice M estraendo una base di $\mathcal{R}(M)$ dall'insieme delle righe di M, e separatamente abbiamo determinato la dimensione dello spazio colonna $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ della matrice M estraendo una base di $\mathcal{C}(M)$ dall'insieme delle colonne di M. Queste operazini sono in generale complesse; c'e' un modo piu' efficiente per effettuarle, che si basa sulla seguenti proposizioni

Proposizione 1 *Ciascuna operazione del tipo*

"sommare ad una riga di una matrice un multiplo scalare di un'altra riga della matrice"

lascia invarianti
(1) lo spazio delle righe della matrice;
(2) le relazioni lineari sulla sequenza delle colonne della matrice, cioe' le relazioni del tipo "la colonna ... e' uguale alla combinazione lineare delle colonne ... ... con coefficienti ... ..."

Proposizione 2 *Sia M una matrice con m righe ed n colonne ad elementi in $\mathbb{R}$ e sia N una matrice con m righe ed n colonne ottenuta da M applicando un numero finito di operazioni del tipo*

"sommare ad una riga un multiplo scalare di un'altra riga"

Allora:
(1) $\mathcal{R}(N) = \mathcal{R}(M)$; in particolare si ha $\dim\mathcal{R}(N) = \dim\mathcal{R}(M)$
(2) le colonne j_1-ma ... j_p-ma di N sono una base di $\mathcal{C}(N)$ se e solo se le colonne j_1-ma ... j_p-ma di M sono una base di $\mathcal{C}(M)$; in particolare si ha $\dim\mathcal{C}(N) = \dim\mathcal{C}(M)$.

Esempio Consideriamo di nuovo la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo ottenere una matrice piu' semplice scegliendo una riga di M e in essa un elemento diverso da zero ed annullando tutti gli altri elementi della colonna dell'elemento scelto (sommando alle altre righe opportuni multipli della riga scelta). Scelta la prima riga e in essa il suo primo elemento, sommando alle altre righe opportuni multipli della prima si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Scelta la seconda riga e in essa il suo terzo elemento, sommando alle altre righe opportuni multipli della seconda si ottiene la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ora si ha:

(1) La prima e la seconda riga di N sono una base di $\mathcal{R}(N)$ (ovvio), dunque per la proposizione precedente sono anche una base di $\mathcal{R}(M)$; in particolare si ha $\dim\mathcal{R}(M) = 2$.

(1) La prima e la terza colonna di N sono una base di $\mathcal{C}(N)$ (semplice da vedere), dunque per la proposizione precedente la prima e la terza colonna di M sono una base di $\mathcal{C}(M)$; in particolare si ha $\dim\mathcal{C}(M) = 2$.

Nell'esempio, lo spazio riga e lo spazio colonna della matrice hanno la stessa dimensione. Non e' un caso.

Teorema 2 *Sia M una matrice ad elementi reali con m righe ed n colonne. Allora lo spazio riga $\mathcal{R}(M)$ e lo spazio colonna $\mathcal{C}(M)$ hanno la stessa dimensione; questa dimensione comune si dice* rango *della matrice e si indica con $\varrho(M)$; in simboli, si pone:*

$$\dim\mathcal{R}(M) = \varrho(M) = \dim\mathcal{C}(M).$$

Esempio La matrice dell'esempio considerato ha rango due: $\varrho(M) = 2$.