Derivate

Derivata di una funzione in un punto

Definizione. Interpretazioni.

Definizione 1 *Sia* $f : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ *una funzione definita in un intorno* I_{x_0} *di un punto* x_0. *Per ciascun* $x \in I_{x_0}$ *con* $x \neq x_0$ *consideriamo il " rapporto incrementale di* f *da* x_0 *a* x *"*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

diciamo che " f *e' derivabile in* x_0 *" se e solo se il rapporto incrementale di* f *da* x_0 *a* x *tende a un limite finito per* $x \to x_0$; *il limite si dice " derivata di* f *in* x_0 *" e si scrive* $f'(x_0)$; *in simboli:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Interpretazione cinematica Interpretiamo x come coordinata di tempo (rispetto ad un certo riferimento), $f(x)$ come coordinata di posizione su una retta (rispetto ad un certo riferimento), e quindi interpretiamo f come la legge del moto di un punto materiale P su una retta.
Per ciascun istante $x \in I_{x_0}$ con $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ velocita' \ media \ di \ \mathrm{P} \ nell'intervallo \ [x_0, x].$$

Dunque l'evenienza che il rapporto incrementale da x_0 a x tenda a un limite finito equivale all'evenienza che la velocita' media del punto P nell'intervallo $[x_0, x]$ tenda a una velocita' limite finita, per $x \to x_0$. In caso affermativo, dunque

$$f'(x_0) = \ velocita' \ istantanea \ di \ \mathrm{P} \ all'istante \ x_0.$$

Interpretazione geometrica A ciascun punto $x \in I_{x_0}$ sull'asse delle ascisse corrisponde un punto $f(x)$ sull'asse delle ordinate, e questi due punti individuano un punto $P = (x, f(x))$ del grafico di f; indichiamo con $P_0 = (x_0, f(x_0))$ il punto associato a x_0.
Per ciascun $x \in I$ con $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ pendenza \ del \ segmento \ P_0P.$$

Dunque l'evenienza che il rapporto incrementale da x_0 a x tenda a un limite finito equivale l'evenienza che la pendenza del segmento P_0P tenda a una pendenza limite finita, per $x \to x_0$. In caso affermativo, dunque

$$f'(x_0) = \ pendenza \ della \ tangente \ al \ grafico \ di \ f \ in P_0.$$

e la retta tangente al grafico di f in P_0 e'

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Un modo equivalente di definire rapporti incrementali e derivata.

Definizione 2 *Sia $f : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intorno I_{x_0} di un punto x_0. Per ciascun $h \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo con $h \neq 0$ consideriamo il " rapporto incrementale di f da x_0 con incremento h "*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

diciamo che " f e' derivabile in x_0 " se e solo se il rapporto incrementale di f da x_0 con incremento h converge a un limite finito per $h \to 0$; il limite si dice " derivata di f in x_0 " e si scrive $f'(x_0)$; in simboli:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Esempi.

1- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione costante $f(x) = c$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$; per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0 \ \to \ 0 \ \ per \ \ x \to x_0,$$

cosi' $f'(x_0) = 0$. Dunque una funzione costante e' derivabile in ogni punto, e in ciascun punto ha derivata nulla.

2- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio di primo grado $f(x) = mx + q$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$; per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{mx+q-(mx_0+q)}{x-x_0} = m \ \to \ m \ \ per \ \ x \to x_0,$$

cosi' $f'(x_0) = m$. Dunque un polinomio di primo grado e' derivabile in ogni punto, e in ciascun punto ha derivata uguale al coefficiente del termine di I grado.

3- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il monomio di secondo grado $f(x) = x^2$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$; per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x + x_0 \ \to \ 2x_0 \ \ per \ \ x \to x_0,$$

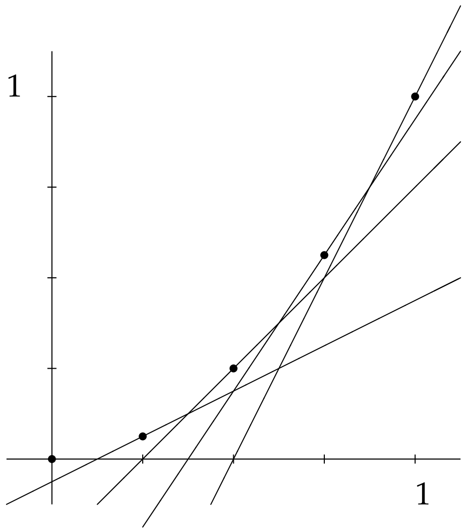
cosi'

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Dunque il monomio di secondo grado e' derivabile in ogni punto, e in ciascun punto ha derivata uguale al doppio dell'ordinata del punto.
La tangente al grafico $y = x^2$ di f nel suo punto (x_0, x_0^2) e' la retta

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0), \qquad cioe' \qquad y = 2x_0x - x_0^2.$$

Nella figura seguente riportiamo alcuni punti del grafico di f (quelli corrispondenti ai punti $0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ sull'asse x) e le rette tangenti in essi al grafico di f.



3′- Sia ancora $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ il monomio di secondo grado $f(x)=x^2$, e sia $x_0\in\mathbb{R}$; per $h\in\mathbb{R}$ con $h\neq 0$ si ha

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}=2x_0+h\ \to\ 2x_0\ \ per\ \ h\to x_0;$$

ritroviamo cosi′ $f'(x_0)=2x_0$.

4- Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ il monomio $f(x)=x^3$, e sia $x_0\in\mathbb{R}$; per $h\in\mathbb{R}$ con $h\neq 0$ si ha

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^3-x_0^3}{h}=3x_0^2+3x_0h+h^2\ \to\ 3x_0^2\ \ per\ \ h\to x_0,$$

cosi′

$$f'(x_0)=3x_0^2.$$

5- Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ il monomio $f(x)=x^n$ ($n\in\mathbb{N}$), e sia $x_0\in\mathbb{R}$; si prova che

$$f'(x_0)=nx_0^{n-1}.$$

6- Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{per } x<0\\ 0 & \text{per } x=0\ .\\ 1 & \text{per } x>0\end{cases}$$

Questa funzione e′ derivabile con derivata nulla in ogni punto $\neq 0$ ma non e′ derivabile in 0; infatti si ha

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{|x|}\ \to +\infty\ per\ x\to 0.$$

Derivabilita' e continuita'. L'interpretazione geometrica porta a far pensare che una funzione discontinua in un punto non possa essere derivabile in quel punto, in altri termini che una funzione derivabile in un punto e' necessariamente continua in quel punto. Cosi' e'.

Proposizione 1 *Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e' derivabile in in punto x_0 allora f e' continua in x_0.*

Dim. Per $x \to x_0$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \\ &\to f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

Non e' vero il viceversa, in quanto esistono funzioni continue in un punto che non sono derivabili nel punto; come mostrato dagli esempi seguenti.

Esempi.

1- La funzione valore assoluto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ e' continua in 0, ma non e' derivabile in 0; infatti

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{per } x > 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{array} \right\} \textit{non tende ad alcun limite per } x \to 0$$

2- La funzione radice terza $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e' continua in 0, ma non e' derivabile in 0; infatti

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \to +\infty \quad \textit{per } x \to 0$$

Derivate sinistre, derivate destre.

Definizione 3 *Sia data una funzione f definita in un intorno destro I^+ di un punto x_0. Diciamo " derivata destra di f in x_0 " ed indichiamo con $f'_+(x_0)$ il limite, se esiste, del rapporto incrementale di f da x_0 a x per $x \to x_0^+$; in simboli:*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Analogamente:

Definizione 4 *Sia data una funzione f definita in un intorno sinistro I di un punto x_0. Diciamo " derivata sinistra di f in x_0 " ed indichiamo con $f'_-(x_0)$ il limite, se esiste, del rapporto incrementale di f da x_0 a x per $x \to x_0^-$; in simboli:*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si ha

Proposizione 2 *Sia data una funzione f definita in un intorno I di un punto x_0. Esiste la derivata di f in x_0 se e solo se esistono e sono uguali le derivate destra e sinistra di f in x_0. In tal caso, si ha*

$$f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0).$$

Esempi.

1- La funzione valore assoluto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ nel punto 0 ha derivata destra $f'_+(0) = 1$ ed ha derivata sinistra $f'_-(0) = -1$.

2- Consideriamo la funzione $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x^\pi$ e il punto $x_0 = 0$. La funzione non e' definita in alcun intorno sinistro di 0, dunque non e' definita alcuna derivata sinistra in 0. Ci chiediamo se g ha derivata destra in 0. Si ha

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^\pi}{h} = h^{\pi-1} \; \to \; 0 \;\; per \;\; h \to 0^+.$$

Dunque g in 0 ha derivata destra $g'_+(0) = 0$.