Matrice trasposta Data una matrice A con m righe ed n colonne, leggendo riga per riga gli elementi di A e trascrivendoli colonna per colonna, equivalentemente, leggendo colonna per colonna gli elementi di A e trascrivendoli riga per riga, si ottiene una matrice con n righe ed m colonne, che si dice matrice *trasposta* di A e si indica con A^T. Chiaramente si ha $(A^T)^T = A$. Ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Per ogni matrice, il rango della sua matrice trasposta coincide col suo rango, infatti

$$\rho(A^T) = \dim \mathcal{R}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A) = \rho(A).$$

In breve, diciamo che il il rango di una matrice e' invariante per trasposizione.

Determinanti

Nello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{G}^3$ dei vettori dello spazio applicati in uno stesso punto fissato, si ha che due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ generano un piano oppure una retta oppure un punto secondo che rispettivamente $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ non sono allineati oppure sono allineati ma non entrambi nulli oppure sono entrambi nulli. In generale, si ha

Proposizione 1 *Siano $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ m vettori in uno spazio vettoriale V. Allora*

$$\dim\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle \leq m;$$
$$\dim\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle = m \quad \text{se e solo se } \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \text{ sono linearmente indipendenti}$$

Dim. Infatti:

(1) se $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ sono linearmente indipendenti, allora essi sono una base dello spazio $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$ da essi generato, e dunque questo spazio ha dimensione m;

(2) se $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ sono linearmente dipendenti, allora da essi si possono estrarre $p < m$ vettori che formino una base dello spazio $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \rangle$, e dunque questo spazio ha dimensione $p < m$.

In particolare, questa proposizione implica la seguente proposizione sul rango di una matrice

Proposizione 2 *Sia data una matrice A quadrata di ordine n, con colonne a_{*j} $(j = 1, 2, \dots, n)$, e righe a_{i*} $(i = 1, 2, \dots, n)$*

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{*1} & \dots & a_{*n} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} a_{1*} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{n*} \end{array} \right].$$

Si ha

$$\begin{aligned} &\rho(A) \leq n; \\ &\rho(A) = n \quad \textit{se e solo se } a_{*1}, \ldots, a_{*n} \textit{ sono linearmente indipendenti} \\ &\qquad\qquad\quad \textit{se e solo se } a_{1*}, \ldots, a_{n*} \textit{ sono linearmente indipendenti} \end{aligned}$$

Ci poniamo il seguente

> **problema** *Sotto quali condizioni sugli elementi di una matrice quadrata di ordine n*
>
> $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
>
> *si ha* $\rho(A) = n$?

Vedremo che $\rho(A) = n$ se e solo se un certo polinomio negli a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, il *determinante* di ordine n, non si annulla.

$n = 1$ Una matrice quadrata di ordine 1 ha rango 1 se e solo se il suo unico elemento e' linearmente indipendente, cioe' e' diverso da zero. Per ogni matrice quadrata A di ordine 1, diciamo determinate di A ed indichiamo con $\det(A)$ il suo unico elemento; in altri termini poniamo

$$\det[a] = a.$$

$n = 2$ Consideriamo una qualsiasi matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

quadrata di ordine 2. Ci chiediamo sotto quali condizioni sugli elementi a_1, a_2, b_1, b_2 di A si ha $\rho(A) < 2$. Distinguiamo due casi:

(1) tutti gli elementi della seconda riga di A sono diversi da zero. In questo caso si ha che $\rho(A) < 2$ se e solo se la prima colonna di A si puo' ottenere come un multiplo scalare della seconda colonna, cioe' esiste un $s \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{cases} a_1 = sb_1 \\ a_2 = sb_2 \end{cases}$, e cio' si ha se e solo se $a_1/a_2 = b_1/b_2$, che a sua volta si ha se e solo se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

(2) uno degli elementi della seconda riga di A e' zero. Nel sottocaso $a_2 = 0$ si ha che $\rho(A) < 2$ se e solo se $a_1b_2 = 0$ e nel sottocaso $b_2 = 0$ si ha che $\rho(A) < 2$ se e solo se $a_2b_1 = 0$.

In ogni caso si ha dunque che $\rho(A) < 2$ se e solo se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Cio' suggerisce di dare la seguente

Definizione 1 *Per ogni matrice quadrata A di ordine 2, diciamo determinate di A ed indichiamo con* $\det(A)$ *il numero reale dato da il prodotto degli elementi sulla diagonale discendente meno il prodotto degli elementi sulla diagonale ascendente; in altri termini poniamo*

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Possiamo dunque dire in breve che

Per ogni matrice A quadrata di ordine 2 si ha

$$\rho(A) = 2 \quad \text{se e solo se} \quad \det(A) \neq 0.$$

Osserviamo che

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \text{cioe'} \quad \det(A^T) = \det A;$$

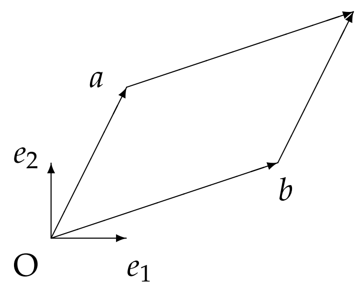
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Significato geometrico. Data una unita' di misura per le lunghezze, fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, mediante la scelta di due versori (vettori di lunghezza 1) $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ fra loro ortogonali applicati in uno stesso punto O, ed identifichiamo coppie ordinate in $\mathbb{R}^2$ con vettori del piano applicati in O.

Si ha

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \pm(\text{area di } P(\mathbf{a}, \mathbf{b})),$$

dove $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e' il parallelogramma indivduato dai vettori $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$; il segno e' + se le cppie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sono entrambe destrorse oppure entrambe sinistrorse, il segno e' - in caso contrario. (nella figura seguente la coppia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e' destrorsa e la coppia $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e' sinistrorsa).



Proprieta' Possiamo identificare una matrice quadrata di ordine 2 con i suoi quattro elementi in $\mathbb{R}$ o con la sequenza delle sue due colonne, ciascuna delle quali e' un vettore in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right], \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice quadrata del secondo ordine come una funzione di due variabili in $\mathbb{R}^2$:

$$\det(A) = \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right], \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2.$$

In quest'ottica, il determinante e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a}+\mathbf{c} & \mathbf{b} \end{array} \right] &= \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{b} \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b}+\mathbf{c} \end{array} \right] &= \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{c} \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} r\mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right] &= r \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & r\mathbf{b} \end{array} \right] &= r \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{array} \right] &= -\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{a} \end{array} \right] &= 0
\end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vettori in $\mathbb{R}^2$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Queste proprieta' si verificano facilmente. Ad esempio, la prima proprieta' si puo' verificare cosi':

$$\begin{aligned}
\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a}+\mathbf{c} & \mathbf{b} \end{array} \right] &= \det \begin{bmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= (a_1 + c_1)b_2 - (a_2 + c_2)b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 + c_1 b_2 - c_2 b_1 \\
&= \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{b} \end{array} \right].
\end{aligned}$$

L'ultima proprieta' si verica immediatamente:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{a} \end{array} \right] = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0.$$

Poiche' il determinante di una matrice e' uguale al determinate della sua trasposta, valgono analoghe proprieta' del determinante rispetto alle righe.

Sistemi lineari Il determinante del secondo ordine fornisce la condizione sotto la quale un sistema di due equazioni in due incognite e' determinato e sotto tale condizine fornisce una formula esplicita per la soluzione ("regola di Cramer").

Proposizione 3 *Siano dati una matrice*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\ \right]$$

ed un qualsiasi sistema lineare avente A come matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \ \textit{cioe'}\ \ \mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c}.$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(1) $\det A \neq 0$;
(2) il sistema lineare e' determinato.
In caso affermativo, l'unica soluzione del sistema e' data da

$$x = \frac{\det\left[\ \mathbf{c} \mid \mathbf{b}\ \right]}{\det\left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\ \right]}, \quad y = \frac{\det\left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{c}\ \right]}{\det\left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\ \right]}.$$

Di seguito ricaviamo la regola di Cramer. Una soluzione del sistema lineare

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c},$$

deve essere anche soluzione dell'equazione

$$\det\left[\ \mathbf{a}x + \mathbf{b}y \mid \mathbf{b}\ \right] = \det\left[\ \mathbf{c} \mid \mathbf{b}\ \right],$$

al cui primo membro si ha

$$\begin{aligned} \det\left[\ \mathbf{a}x + \mathbf{b}y \mid \mathbf{b}\ \right] &= \det\left[\ \mathbf{a}x \mid \mathbf{b}\ \right] + \det\left[\ \mathbf{b}y \mid \mathbf{b}\ \right] \\ &= x\det\left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\ \right] + y\det\left[\ \mathbf{b} \mid \mathbf{b}\ \right] \\ &= x\det\left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\ \right]. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita x

$$x\det\left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\ \right] = \det\left[\ \mathbf{c} \mid \mathbf{b}\ \right],$$

e in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$y\det\left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b}\ \right] = \det\left[\ \mathbf{a} \mid \mathbf{c}\ \right].$$

Se $\det(A) \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente entrambe le incognite, ed otteniamo la regola di Cramer.

Esempio Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x+7y=2 \\ 5x+11y=13 \end{cases}$$

Si ha

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} = 33-35=-2;$$

dunque il sistema e' determinato, e la sua soluzione e' data da

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}}{-2} = \frac{69}{2}$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}}{-2} = -\frac{29}{2}$$

In realta' la regola di Cramer e' piu' utile quando si consideri un sistema con coefficienti dipendenti da uno o piu' parametri. Consideriamo ad esempio i sistemi

$$\begin{cases} (3+t)x+(7+t)y=2+t \\ (5+t)x+(11+t)y=13+t \end{cases},$$

dove t e' un parametro in $\mathbb{R}$. Si ha

$$\det\begin{bmatrix} 3+t & 7+t \\ 5+t & 11+t \end{bmatrix} = 2t-2;$$

dunque il sistema e' determinato se e solo se $t \neq 1$; sotto questa condizione la sua soluzione e' data da

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} 2+t & 7+t \\ 13+t & 11+t \end{bmatrix}}{2(t-1)} = \frac{-7t-69}{2(t-1)}$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 3+t & 2+t \\ 5+t & 13+t \end{bmatrix}}{2(t-1)} = -\frac{6t+29}{2(t-1)}$$

n=3 Il determinante di una matrice del secondo ordine puo' essere indicato in vari modi, ad esempio con

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad \text{oppure} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Analoghe notazioni si usano per matrici di ordine superiore.

Definizione 2 *Per ogni matrice A quadrata di ordine 3*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

diciamo determinate di A ed indichiamo con $\det(A)$, *in breve* $|A|$, *il numero reale dato da*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \ldots = -3.$$

Si prova che
-l'operazione di trasposizione lascia invariato il determinante di una matrice:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Si osserva che:
-il determinante di una matrice triangolare superiore e' uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale discendente:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 b_2 c_3;$$

in particolare,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Significato geometrico. Data una unita' di misura per le lunghezze, fissiamo nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, mediante la scelta di tre versori (vettori di lunghezza 1) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ed $\mathbf{e}_2$ fra loro ortogonali applicati in uno stesso punto O, ed identifichiamo terne ordinate in $\mathbb{R}^3$ con vettori dello spazio applicati in O.
Si ha

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \pm(\text{volume di } P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})),$$

dove $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ e' il parallelepipedo indivduato dai vettori $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$; il segno e' + se le terne $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ed $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono entrambe destrorse oppure entrambe sinistrorse, il segno e' - in caso contrario.