Derivate

Di solito, considereremo funzioni $f : A \to \mathbb{R}$, dove A e' un intervallo, o un unione di intervalli (non ridotti a un punto). Indicato con B l'insieme dei punti nei quali f e' derivabile [1] si ha una funzione

$B \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f'(x)$

che viene detta funzione derivata di f, ed indicata con f'.
Ci sono vari modi di indicare la derivata di f in un punto x_0 :

$$f'(x_0), \qquad \frac{df}{dx}(x_0), \qquad (Df)(x_0),$$

cui corrispondono vari modi di indicare la funzione derivata:

$$f', \qquad \frac{df}{dx}, \qquad Df.$$

Spesso una funzione viene considerata come un'espressione $f(x)$ in una variabile reale x, e la derivazione come un'operatore, indicato con $\frac{d}{dx}$ o D, che trasforma l'espressione $f(x)$ in una nuova espressione

$$\frac{d}{dx}(f(x)), \qquad D(f(x)).$$

Derivate elementari

1- Si prova che ciascuna funzione potenza

$$x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

e' derivabile in ogni punto del suo dominio naturale, tranne al piu' in 0, e la sua funzione derivata e' data da

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

L'eccezione si ha per $0 < \alpha < 1$, in tal caso x^α e' definita in $x = 0$, ma non e' derivabile in $x = 0$ in quanto

$$\frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = x^{\alpha-1} \to +\infty \quad per\ x \to 0^+.$$

2- La funzione esponenziale

$$e^x, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

e' derivabile su $\mathbb{R}$ e coincide con la sua funzione derivata:

$$De^x = e^x, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

[1] Nel caso in cui f fosse definita solo in intorni destri di un punto, consideriamo la derivabilita' e la derivata destra di f nel punto; analogamente per la sinistra.

Questo fatto deriva da un limite notevole sull'esponenziale. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h},$$

passando al limite per $h \to 0$ si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0};$$

dunque $(De^x)_{x=x_0} = e^{x_0}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

3-La funzione logaritmo

$$\log x, \qquad x \in]0, +\infty[$$

e' derivabile sul suo dominio $]0, +\infty[$ e la sua funzione derivata e':

$$D \log x = \frac{1}{x}, \qquad\qquad (x \in]0, +\infty[).$$

Questo fatto deriva da un limite notevole sul logaritmo. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{\log (x_0 + h) - \log x_0}{h} = \frac{\log \left(\frac{x_0+h}{x_0} \right)}{h} = \frac{\log \left(1 + \frac{h}{x_0} \right)}{h} = \frac{\log \left(1 + \frac{h}{x_0} \right)}{\frac{h}{x_0}} \frac{1}{x_0},$$

passando al limite per $h \to 0$ si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log (x_0 + h) - \log x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{\log \left(1 + \frac{h}{x_0} \right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0};$$

dunque $(D \log x)_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

4-La funzione seno

$$\sin x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e' derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua funzione derivata e':

$$D \sin x = \cos x, \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La funzione coseno

$$\cos x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e' derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua funzione derivata e':

$$D \cos x = - \sin x, \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Derivazione e operazioni aritmetiche sulle funzioni. Il comportamento dell'operazione di derivazione di una funzione in un punto rispetto alle operazioni aritmetiche sulle funzioni si puo' descrivere come segue.

> Siano f, g funzioni definite in un intorno di un punto x_0, derivabili in x_0, e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora anche ciascuna delle funzioni
>
> $$f + g, \quad f - g, \quad cf, \quad fg, \quad \frac{f}{g}$$
>
> (con dovuta condizione su g al denominatore) e' derivabile in x_0, inoltre
>
> $$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f-g)'(x_0) &= f'(x_0) - g'(x_0) \\ (cf)'(x_0) &= cf'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

Queste identita' vengono dette " regole di derivazione " della somma, differenza, prodotto, quoziente di funzioni. [2]
Il comportamento dell'operazione di derivazione di una funzione rispetto alle operazioni aritmetiche sulle funzioni si puo' descrivere come segue.

> Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni definite su un intervallo I (non ridotto a un punto), derivabili su I, e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora anche ciascuna delle funzioni
>
> $$f + g, \quad f - g, \quad cf, \quad fg, \quad \frac{f}{g}$$

---

[2] Le regole di derivazione principali sono qelle della somma e del prodotto. La regola di derivazione della somma deriva dal fatto che il rapporto incrementale di $f+g$ da x_0 a x si puo' scrivere come

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

La regola di derivazione del prodotto deriva dal fatto che il rapporto incrementale di fg da x_0 a x si puo' scrivere come

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

(con dovuta condizione su g al denominatore) e' derivabile su I, inoltre

$$\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(f-g)' &= f' - g' \\
(cf)' &= cf' \\
(fg)' &= f'g + fg' \\
(\frac{f}{g})' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}
\end{aligned}$$

Se le funzioni sono date da espressioni in una variabile, e dunque la derivata viene vista come un operatore su tali espressioni, allora e' piu' naturale scrivere

$$\begin{aligned}
D(f(x)+g(x)) &= Df(x) + Dg(x) \\
D(cf(x)) &= cDf(x) \\
D(f(x)g(x)) &= (Df(x))g(x) + f(x)(Dg(x)) \\
D(\frac{f(x)}{g(x)}) &= \frac{(Df(x))g(x) - f(x)(Dg(x))}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Esempi Di seguito riportiamo alcuni calcoli di derivate di funzioni viste come espressioni in una variabile; mostriamo tutti i passaggi.

$$\begin{aligned}
D(2-3x+5x^2-7x^3) &= D(2) - 3D(x) + 5D(x^2) - 7D(x^3) \\
&= 0 - 3\cdot 1 + 5\cdot 2x - 7\cdot 3x^2 \\
&= -3 + 10x - 21x^2 \\
D((3x+2)e^x) &= (D(3x+2))e^x + (3x+2)(De^x) \\
&= 3e^x + (3x+2)e^x \\
&= (3x+5)e^x \\
D((3x+2)\log x) &= (D(3x+2))\log x + (3x+2)(D\log x) \\
&= 3\log x + \frac{3x+2}{x} \\
D\left(\frac{3x+2}{7x+5}\right) &= \frac{(D(3x+2))(7x+5) - (3x+2)(D(7x+5))}{(7x+5)^2} \\
&= \frac{3(7x+5) - (3x+2)7}{(7x+5)^2} \\
&= \frac{14}{(7x+5)^2}
\end{aligned}$$

Funzioni polinomiali, razionali. Tangente. In particolare, dai punti precedenti segue che:
1- ogni funzione polinomiale

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0)$$

di grado $n \geq 1$ e' derivabile su $\mathbb{R}$, e la sua funzione derivata e' una funzione polinomiale

$$Dp(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

di grado $n-1$. Chiaramente anche le funzioni polinomiali di grado 0, cioe' le funzioni costanti non nulle, e anche la funzione costante nulla, sono derivabili ed hanno per derivata la funzione identicamente nulla.

2- ogni funzione razionale

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \qquad (a_n, b_m \neq 0)$$

e' derivabile nel suo domino di definizione, e la funzione derivata h' e' una funzione razionale con lo stesso dominio di definizione di h.

3- Poiche' le funzioni coseno e seno sono derivabili su $\mathbb{R}$, la funzione tangente $\tan x = \sin(x)/\cos(x)$ e' derivabile nel suo dominio di definizione, cioe' su $A = \mathbb{R} - \{\frac{k}{2}\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ inoltre si ha

$$\begin{aligned} D\tan(x) = D\,\frac{\sin x}{\cos x} &= \\ &= \frac{(D\sin x)\cos x - \sin x (D\cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

Derivazione e composizione di funzioni. Il comportamento dell'operazione di derivazione di una funzione in un punto rispetto all'operazione di composizione di funzioni si puo' descrivere come segue.

> Siano f una funzione definita in un intorno di un punto x_0 e g una funzione definita in un intorno di $f(x_0)$ ed esista la funzione composta $g \circ f$ in un intorno di x_0. Se f e' derivabile in x_0 e g e' derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ e' derivabile in x_0, inoltre
>
> $$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Questa identita' viene detta "regola di derivazione delle funzioni composte". [3]
Il comportamento dell'operazione di derivazione di una funzione rispetto all'operazione di composizione di funzioni si puo' descrivere come segue.

> Siano $f : A \to B$ una funzione derivabile su A, e $g : B \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su B, (A, B intervalli non ridotti a un punto) allora la funzione $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ e' derivabile su A, inoltre
>
> $$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

Se le funzioni sono date da espressioni in una variabile, e dunque la derivata viene vista come un operatore su tali espressioni, allora la regola di derivazione puo' essere descritta informalmente nel modo seguente. Siano date due espressioni f e g in un variabile, e sia $g(f(x))$ l'espressione ottenuta sostituendo alla variabile di g l'espressione $f(x)$; allora la derivata di $g(f(x))$ rispetto a x e' uguale al prodotto della derivata di $g(f(x))$ rispetto a $f(x)$ come se $f(x))$ fosse la variabile, per la derivata di $f(x)$ rispetto alla variabile x :

$$\begin{aligned} &\textit{derivata di } g(f(x)) \textit{ rispetto a } x \ = \\ &\qquad = (\textit{derivata di } g(f(x)) \textit{ rispetto a } f(x)) \cdot (\textit{derivata di } f(x) \textit{ rispetto a } x) \end{aligned}$$

Alcuni esempi.

$$\begin{aligned} D\left(\left(3x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{2}\left(3x^2+2x+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot D(3x^2+2x+1) \\ &= \frac{1}{2}\left(3x^2+2x+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left(\sin^3(x^2)\right) &= 3\sin^2(x^2) \cdot D\sin(x^2) \\ &= 3\sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot D(x^2) \\ &= 3\sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x \end{aligned}$$

---

[3] Questa regola deriva dal fatto che il rapporto incrementale di $g \circ f$ da x_0 a x si puo' scrivere come

$$\begin{aligned} \frac{(g\circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D\left(\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{3}{2}\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot D\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(D\left(3x^2\right)+D\left((2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(6x+\frac{5}{4}(2x+1)^{\frac{1}{4}} \cdot D(2x+1)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(6x+\frac{5}{4}(2x+1)^{\frac{1}{4}} \cdot 2\right) = \ldots
\end{aligned}
$$