Determinanti

$n = 3$. **Proprieta'** Possiamo riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine come una funzione delle sue colonne:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3.$$

In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned} \det [\mathbf{a}+\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \det [\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \\ \det [r\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= r\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \\ \\ \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{d}, \mathbf{c}] &= \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \det [\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}] \\ \det [\mathbf{a}, r\mathbf{b}, \mathbf{c}] &= r\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \\ \\ \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d}] &= \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}] \\ \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, r\mathbf{c}] &= r\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \\ \\ \det [\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] &= \det [\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = \det [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \\ \det [\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] &= \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}] = \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = 0 \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ in $\mathbb{R}^3$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Possiamo riguardare il determinante di una matrice del terzo ordine anche come una funzione delle sue righe:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3.$$

Poiche' il determinante e' invariante per trsposizione, si hanno proprieta' per righe analoghe alle proprieta' per colonne sopra esposte. Da cio' segue in particolare che

> l'operazione di sommare ad una riga un multiplo scalare di un'altra riga lascia invariato il determinante

Verifichiamo questa affermazione rispetto alle prime due righe:

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}+\alpha\mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}.$$

Dall'invarianza del determinante rispetto all'operazione di sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga discende la possibilita' di ricondurre il calcolo del determinante di una matrice al caso di una matrice triangolare. Ad esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Rango

Proposizione 1 *Per ogni matrice A quadrata di ordine 3 si ha*

$$\rho(A) = 3 \quad \textit{se e solo se} \quad \det(A) \neq 0.$$

Dim. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}, & \mathbf{b}, & \mathbf{c} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3.$$

L'enunciato e' equivalente alle due affermazioni seguenti: se $\rho(A) < 3$ allora $\det(A) = 0$, e se $\rho(A) = 3$ allora $\det(A) \neq 0$.

(1) Sia $\rho(A) < 3$. Allora una delle tre colonne di A si puo' ottenere come combinazione lineare delle altre due; consideriamo il caso in cui $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, gli altri sono analoghi. Si ha

$$\det[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}] = \det[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}] = \alpha \det[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}] + \beta \det[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{b}] = 0.$$

(2) Sia $\rho(A) = 3$. Essendo le colonne linearmente indipendenti, nella prima colonna deve allora esserci qualche elemento diverso da zero; scambiando eventualmente due righe, possiamo pensare che $a_1 \neq 0$; sommando alla seconda ed alla terza riga opportuni multipli della prima riga trasformiamo la matrice data in una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & b_3' & c_3' \end{bmatrix},$$

che avra' lo stesso rango della matrice data. Essendo le colonne linearmente indipendenti, uno fra b_2' e b_3' deve essere diverso da zero; scambiando eventualmente due righe, possiamo pensare che $b_2' \neq 0$; sommando alla terza riga un opportuno multiplo della seconda riga trasformiamo la matrice data in una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & 0 & c_3'' \end{bmatrix},$$

che avra' lo stesso rango della matrice data. Essendo le colonne linearmente indipendenti, si deve avere $c_3'' \neq 0$. Infine si ha

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \pm \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & 0 & c_3'' \end{bmatrix} = a_1 b_2' c_3'' \neq 0.$$

Sistemi lineari Il determinante del terzo ordine fornisce la condizione sotto la quale un sistema di tre equazioni in tre incognite e' determinato e sotto tale condizine fornisce una formula esplicita per la soluzione ("regola di Cramer").

Proposizione 2 *Siano dati una matrice*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

ed un qualsiasi sistema lineare avente A come matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}, \quad \textit{cioe'} \ \ \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z = \mathbf{d}.$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) $\det A \neq 0$;

(2) il sistema lineare e' determinato.

In caso affermativo, l'unica soluzione del sistema e' data da

$$x = \frac{\det [\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}, \quad y = \frac{\det [\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}]}{\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}, \quad z = \frac{\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]}{\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}$$

Applicazione (Facoltativo) Sono dati sei numeri reali $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$, e si vuole determinare un polinomio

$f(x) = a + bx + cx^2$

tale che

$f(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$

Ci si chiede: sotto quali condizioni esiste un tale polinomio? nei casi in cui esiste, ne esiste esattamente uno? nei casi in cui ne esiste esattamente uno, in che modo i coefficienti del polinomio dipendono dai dati iniziali?

Per evitare condizioni fra loro contraddittorie, o ripetute, imponiamo che i tre numeri x_1, x_2, x_3 siano a due a due distinti:

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3.$

Ora, le tre condizioni imposte si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a + bx_1 + cx_1^2 & = y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 & = y_2 \\ a + bx_3 + cx_3^2 & = y_3 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c. Calcoliamo ora il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).
\end{aligned}$$

Sotto le condizioni imposte

$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3, \quad x_2 \neq x_3,$

questo determinante e' non nullo. Dunque il sistema lineare ha, per ogni valore di y_1, y_2, y_3, esattamente una soluzione.

La soluzione e' data da

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & x_2 & x_2^2 \\ y_3 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\
b &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 \end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\
c &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.
\end{aligned}$$

Determinante di ordine n. Definiamo il determinante $\det(A)$ di una matrice quadrata A di un qualsiasi ordine $n \geq 1$ in modo ricorsivo.

(1) Per $n = 1$, per ogni matrice $A = [a_{11}]$ di ordine 1, definiamo

$$\det(A) = a_{11};$$

(n) Per $n > 1$, supponiamo di avere definito il determinante per una qualsiasi matrice di ordine $n - 1$, e definiamo il determinante per una qualsiasi matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ di ordine n nel modo seguente.

Per ogni $i, j = 1, \ldots, n$ diciamo *minore complementare* dell'elemento a_{ij}, ed indichiamo con A_{ij}, il determinate della matrice di ordine $n - 1$ ottenuta dalla matrice A cancellando la riga $i-$ma e la colonna $j-$ma:

$$A_{ij} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & \cancel{a_{1j}} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \cancel{a_{nj}} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definiamo $\det(A)$ come la somma algebrica con segni $+, -, +, -, \ldots$ dei prodotti degli elementi della prima colonna di A per i rispettivi minori complementari:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} - \cdots \pm a_{n1}A_{n1}.$$

Sviluppanndo questa espressione si ottiene un polinomio omogeneo di grado n negli elementi della matrice, costituito da $n!$ termini.

Per il determinante di una matrice quadrata A, oltre alla notazione $\det(A)$ useremo anche la notazione $|A|$.

Si prova che

il determinante di una matrice coincide col determinante della sua trasposta.

Per una matrice triangolare si ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Proprieta' dei determinanti Sia n un intero positivo arbitrariamenente fissato. Il determinante della generica matrice $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ quadrata di ordine n puo' essere visto come una funzione

$$\det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n\right]$$

delle n colonne $\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ di A.

Come tale, il determinante e' caratterizzato dalle seguenti proprieta'

- per $1 \leq j \leq n$ e $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}'_j + \mathbf{a}''_j$, si ha:

$$\det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n\right] = \det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}'_j,\dots,\mathbf{a}_n\right] + \det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}''_j,\dots,\mathbf{a}_n\right];$$

- per $1 \leq j \leq n$ e $\mathbf{a}_j = r\mathbf{a}'_j$, si ha:

$$\det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n\right] = r\det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}'_j,\dots,\mathbf{a}_n\right];$$

- per $1 \leq p < q \leq n$ si ha:

$$\det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p,\dots,\mathbf{a}_q,\dots,\mathbf{a}_n\right] = -\det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_q,\dots,\mathbf{a}_p,\dots,\mathbf{a}_n\right];$$

- per $1 \leq p < q \leq n$ e $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_q$, si ha:

$$\det\left[\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_p,\dots,\mathbf{a}_q,\dots,\mathbf{a}_n\right] = 0.$$

Valgono analoghe proprieta' per le righe.

Rango. Sistemi lineari. La condizione sotto la quale una matrice quadrata di ordine n ha rango massimo cioe' n e' data dal

Teorema 1 *Per ogni matrice A quadrata di ordine n si ha*

$$\rho(A) = n \quad \textit{se e solo se} \quad \det(A) \neq 0.$$

Il determinante di ordine n fornisce la condizione sotto la quale un sistema di n equazioni in n incognite e' determinato e sotto tale condizine fornisce una formula esplicita per la soluzione ("regola di Cramer").

Teorema 2 *Siano dati una matrice quadrata A di ordine n, con colonne $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$,*

$$A = [\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n]$$

ed un qualsiasi sistema lineare avente A *come matrice dei coefficienti*

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}.$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) $\det A \neq 0$.

(2) il sistema lineare e' determinato.

In caso affermativo, l'unica soluzione del sistema e' data da

$$x_i = \frac{\det\left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{a}_n\right]}{\det\left[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n\right]} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

dove al denominatore compare il determinante della matrice ottenuta sostituendo nella matrice A *la colonna* $i-$*ma* $\mathbf{a}_i$ *con la colonna dei termini noti* $\mathbf{b}$.