Massimi, minimi, monotonia, e derivate

Punti di massimo, minimo per una funzione

Definizione 1 *Si dice che un punto c di un sottinsieme A di $\mathbb{R}$ e' un punto interno ad A se e solo se c possiede qualche intorno I_c contenuto in A. In altri termini: $c \in A$ si dice interno ad A se e solo se esiste un $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $I_c(r) \subseteq A$.*

Esempio Per un qualsiasi intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ con $a \neq b$, si ha che un punto $c \in [a, b]$ e' interno ad A se e solo se c e' diverso da a e da b. Per qualsiasi intervallo ridotto ad un punto $[a, a]$ non esiste alcun punto interno.

Definizione 2 *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$;*
- c si dice "punto di massimo globale" per f se e solo se
$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in A;$$
c si dice "punto di massimo globale stretto" per f se e solo se vale il $>$ per ogni $x \neq c$;
- c si dice "punto di massimo locale" per f se e solo se esiste un intorno I di c tale che
$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in A \cap I.$$
c si dice "punto di massimo locale stretto" per f se e solo se vale il $>$ per ogni $x \neq c$.
In modo analogo si definiscono i punti di minimo globale (eventualmente stretto) per f e i punti di minimo locale (eventualmente stretto) per f. Al posto dei termini "globale" e "locale" si usano anche i termini "assoluto" e "relativo".

Esempi
(1) Per una qualsiasi funzione costante su un intervallo, tutti i punti del suo dominio sono simultaneamente punti di massimo globale e di minimo globale (non stretti).
(2) Per la funzione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^2,$$
il punto 0 e' l'unico punto di minimo locale, e' anche globale stretto, e non c'e' alcun punto di massimo locale.
(3) Per la funzione
$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \sin x,$$
i punti $-\pi$ e $\pi/2$ sono punti di massimo locale (entrambi stretti, il secondo e' anche globale stretto), e i punti $-\pi/2$ e π sono punti di minimo (entrambi stretti, il primo e' anche globale stretto).

Si potrebbe pensare che una funzione definita su un itervallo chiuso e limitato possegga sia qualche punto di massimo globale che qualche punto di minimo globale. Cio' non vero per qualsiasi funzione, [1] ma e' vero per una qualsiasi funzione continua:

[1] Ad esempio, la seguente funzione non possiede ne' punti di massimo globale ne' punti di minimo globale:
$$\ell : [-1, +1] \to \mathbb{R}, \quad \ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = -1 \\ x & \text{per } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases}.$$

Teorema 1 **(di Weierstrass)** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$. Allora esistono in $[a,b]$ almeno un punto di massimo globale ed almeno un punto di minimo globale per f.*

Non diamo la dimostrazione di questo teorema.

Derivata nei punti di masiimo, minimo.

Teorema 2 **(di Fermat)** *Siano date una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto $c \in A$, interno ad A. Se c e' un punto di massimo (o minimo) locale per f, ed f e' derivabile in c, allora*

$$f'(c) = 0.$$

Nell'interpretazione cinematica della funzione come legge del moto di un punto materiale P che in un intervallo temporale $[a,b]$ si muove su una retta, il teorema afferma che sotto la condizione di regolarita' posta in ciascun istante in $]a,b[$ nel quale il punto P ha una posizione localmente massima (o minima), la velocita' istantanea di P e' nulla.

Per quanto riguarda il grafico della funzione, il teorema afferma che sotto la condizione di regolarita' posta in ciascun punto del grafico nel quale l'ordinata e' localmente massima (o minima), la tangente al grafico e' parallela all'asse delle ascisse.

Idea della dimostrazione.

(0) Esiste un intorno I di c tale che $I \subseteq A$ e $f(c) \geq f(x)$ per ogni $x \in I$.

(1) Per i punti $x \in I$ con $x < c$ si ha

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0;$$

passando al limite per $x \to c^-$ si mantiene la disuguaglianza, e si ha $f'_-(c) \geq 0$.

(2) Per i punti $x \in I$ con $x > c$ si ha

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0;$$

passando al limite per $x \to c^+$ si mantiene la disuguaglianza, e si ha

$$f'_+(c) \leq 0.$$

(3) Infine si ha

$$0 \leq f'_-(c) = f'(c) = f'_+(c) \leq 0,$$

da cui $f'(c) = 0$.

Abbiamo usato in modo decisivo l'ipotesi che il punto c sia interno ad A. In effetti, se si toglie dall'enunciato del teorema l'ipotesi che il punto c sia interno ad A, allora l'enunciato diviene falso (cfr. Esempio (3) del paragrafo precedente).

Osserviamo infine che non e' detto che data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e un punto c interno ad A tale che $f'(c) = 0$, allora si debba avere che c e' un punto di massimo o minimo locale per f. Ad esempio, per la funzione

$$f(x) = x^3, \qquad x \in \mathbb{R}$$

si ha $f'(0) = 0$ ma $x = 0$ non e' ne' un punto di massimo locale ne' un punto di minimo locale per f, in quanto f e' strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Teorema del valor medio di Lagrange D'ora in poi ciascun intervallo considerato verra' tacitamente assunto non ridotto ad un punto.

Teorema 3 (di Lagrange). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$; allora esiste qualche punto c nell'intervallo $]a, b[$ nel quale la derivata di f e' uguale al rapporto incrementale di f da a a b :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Non diamo la dimostrazione di questo teorema.

Nell'interpretazione cinematica della funzione come legge del moto di un punto materiale P che in un intervallo temporale $[a, b]$ si muove su una retta, il teorema afferma che sotto le condizioni di regolarita' poste esiste un almeno un istante in $]a, b[$ nel quale la velocita' istantanea di P e' uguale alla velocita' media di P nell'intervallo temporale $[a, b]$.

Per quanto riguarda il grafico della funzione, il teorema afferma che sotto le condizioni di regolarita' poste esiste almeno un punto del grafico diverso dagli estremi nel quale la retta tangente al grafico sia parallela alla retta che unisce gli estremi del grafico.

Monotonia e segno della derivata.

Teorema 4 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, f continua su I e derivabile in ogni punto interno ad I. Si ha*

-f e' crescente su I se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$;

-se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$ allora f e' strettamente crescente su I;

-f e' decrescente su I se e solo se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$;

-se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$ allora f e' strettamente decrescente su I.

Dimostrazione. Diamo una dimostrazione del primo enunciato ed approfondendola un poco otteniamo una dimostrazione del secondo enunciato.

(1) Sia f crescente su I e sia x_0 un punto interno ad I. Per ogni punto x diverso da x_0 in I si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0;$$

passando al limite per $x \to x_0$ la disuguaglianza si mantiene, e si ha $f'(x_0) \geq 0$.

(1) Sia $f'(x) \geq 0$ per ogni punto x interno ad I. Per ogni due punti $x_1 < x_2$ in I si ha

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) \\ &= f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) \geq f(x_1). \end{aligned}$$

Nel passaggio centrale si e' applicato il teorema del valor medio alla funzione f sull'intervallo $[x_1, x_2] \subseteq I$ e si e' ottenuto che esiste un $c \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1};$$

nell'ultimo passaggio si e' usata l'ipotesi che $f'(x) \geq 0$ per ogni x interno ad I e l'assunto $x_2 - x_1 > 0$.

Se $f'(x) > 0$ per ogni punto x interno ad I, l'argomento di sopra porge

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) > f(x_1).$$

Osserviamo che non e' detto che se una funzione f e' strettamente crescente su un intervallo I allora si debba avere che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$. Ad esempio, per la funzione

$$f(x) = x^3, \qquad x \in \mathbb{R}$$

e' strettamente crescente su $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Esempio. Studiamo l'andamento della funzione

$$f(x) = x^5 - 15x^3 + 81.$$

Osserviamo che la funzione f e' definita e derivabile su $\mathbb{R}$.

$f(x)$ tende a $+\infty$ e $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$, dunque f non possiede ne' massimo ne' minimo globale. La funzione derivata di f e'

$$f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2 - 9);$$

il segno di $f'(x)$ e la crescenza/decrescenza di $f(x)$ sono descritti dalla tabella

$$\begin{array}{r|ccccccc} x & & -3 & & 0 & & 3 & \\ \textit{segno di } f'(x) & + & 0 & - & 0 & - & 0 & + \\ f(x) & \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

Dunque la funzione f

- e' strettamente crescente su $]-\infty, -3]$

- ha un punto di massimo locale stretto in -3, cui corrisponde il valore di massimo locale $f(-3) = 243$;

- e' strettamente decrescente su $[-3, 0]$
- in 0 ha derivata nulla (e si ha $f(0) = 81$);
- e' strettamente decrescente su $[0, 3]$
- ha un punto di minimo locale stretto in 3, cui corrisponde il valore di minimo locale $f(3) = -81$
- e' strettamente crescente su $[3, +\infty[$

Si lascia al lettore di dare una rappresentazione del grafico di f coerente con queste informazioni.