Derivate di ordine superiore

Derivate di ordine superiore. Il processo che porta alla definizione di derivabilta' e di derivata di una funzione in un punto si puo' iterare per dare per ogni intero positivo n la definizione di derivabilita' n volte e di derivata $n-$ma di una funzione in un punto.

Definizione 1 *Si consideri una funzione $f : I_c \to \mathbb{R}$ definita in un intorno di un punto $c \in \mathbb{R}$; ha allora senso chiedersi se f e' derivabile in c e in caso affermativo si ha la derivata $f'(c)$.*
(2) Se f e' derivabile in un intorno $(I_c)_1 \subset I_c$, si considerari la funzione derivata $f' : (I_c)_1 \to \mathbb{R}$; ha allora senso chiedersi se f' e' derivabile in c e in caso affermativo si ha la derivata $(f')'(c)$. Si dice allora che f e' derivabile due volte in c, che $(f')'(c)$ e' la derivata seconda di f in c, e si pone $(f')'(c) = f''(c)$.
(3) Se f e' derivabile due volte in un intorno $(I_c)_2 \subset (I_c)_1$, si considerari la funzione derivata seconda $f'' : (I_c)_2 \to \mathbb{R}$; ha allora senso chiedersi se f'' e' derivabile in c e in caso affermativo si ha la derivata $(f'')'(c)$. Si dice allora che f e' derivabile tre volte in c, che $(f'')'(c)$ e' la derivata terza di f in c, e si pone $(f'')'(c) = f'''(c)$.
(n) Per ogni intero positivo n si viene cosi' a dare senso alla frase "f e' derivabile n volte in c" e a definire la derivata $n-$ma $f^{(n)}(c)$ di f in c. Altre notazioni:

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x}(c), \quad (\mathrm{D}^n f)\,(c).$$

Si osservi che esplicitamente la derivata seconda di f in c e' il limite (se esiste finito) per $x \to c$ del rapporto incrementale di f' da c a x :

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Se la funzione f viene pensata come la legge del moto su una retta di un punto materiale P in un intorno temporale I_c dell'istante c, allora

$$\begin{aligned} f'(x) = &\quad \text{velocita' istantanea di P all'istante } x \\ \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = &\quad \text{accelerazione media di P nell'intervallo temporale } [c, x] \\ f''(c) = &\quad \text{accelerazione istantanea di P all'istante } c \end{aligned}$$

Per ogni intero positivo n si da pure la definizione di funzione derivata $n-$ma di una funzione data.

Definizione 2 *Per ogni intero positivo n ed ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$, posto $A_n = \{x \in A : \exists f^{(n)}(x)\}$, si definisce la funzione $f^{(n)}$ derivata $n - ma$ di f come la funzione*

$$f^{(n)} : A_n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f^{(n)}(x).$$

Altre notazioni:

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x}, \quad \mathrm{D}^n f.$$

Se una funzione viene pensata come un'espressione $f(x)$ in una variabile x con assegnato campo di variabilit $x \in A$, allora la funzione derivata viene pensata come un'espressione nella variabile x indicata con simboli come

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x} f(x), \quad \mathrm{D}^n f(x),$$

con l'ovvio campo di variabilita'.

Derivate di ordine superiore elementari

(1) La derivata $k-$ma di una potenza x^m ad esponente naturale m ($x \in \mathbb{R}$) e' data da

$$\mathrm{D}^k x^m = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k} & \text{per } 0 \leq k < m \\ m! & \text{per } k = m \\ 0 & \text{per } k > m \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(2) La derivata $k-$ma di una potenza x^α ad esponente reale non naturale α ($x \in \mathbb{R}^+$) e' data da

$$\mathrm{D}^k x^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}, \qquad (x \in \mathbb{R}^+);$$

(si noti che per ogni k si ha una funzione diversa dalla funzione nulla).

(3) La derivata $k-$ma della funzione esponenziale e^x ($x \in \mathbb{R}$) e' data da

$$\mathrm{D}^k e^x = e^x, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

(4) Le prime due derivate della funzione logaritmo $\log x$ ($x \in \mathbb{R}^+$) sono date da

$$\mathrm{D} \log x = \frac{1}{x}, \quad \mathrm{D}^2 \log x = -\frac{1}{x^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}^+);$$

in generale si ha

$$\mathrm{D}^k \log x = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}, \qquad (x \in \mathbb{R}^+);$$

(5) Le derivate della funzione seno $\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) sono date da

k	0	1	2	3	4	...
$D^k \sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	...

Le derivate della funzione coseno $\cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) sono analoghe.

Funzioni curve verso l'alto, il basso e punti di flesso. Lungo questo paragrafo consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su un intervallo I. Per ogni punto c interno ad I, esiste dunque la retta tangente al grafico $y = f(x)$ di f nel punto $(c, f(c))$, ed ha equazione

$$y = f(c) + f'(c)(x-c).$$

Teorema 1 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo I, con funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ continua.*

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1.1) f' e' crescente su I;

(1.2) le rette tangenti al grafico di f stanno al di sotto del grafico di f.

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(2.1) f' e' decrescente su I;

(2.2) le rette tangenti al grafico di f stanno al di sopra del grafico di f.

Definizione 3 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo I, con funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ continua.*

(1) f si dice "curva verso l'alto" se e solo se soddisfa le condizioni equivalenti (1.1), (1.2);

(2) f si dice "curva verso il basso" se e solo se soddisfa le condizioni equivalenti (2.1), (2.2).

Definizione 4 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo I, e sia c un punto interno ad I. Si dice che c e' un punto di flesso per f se e solo se esiste un intorno J di c tale che i grafici delle restrizioni della funzione f ai due semintorni J^- e J^+*

$$x \mapsto f(x) \quad (x \in J^-) \qquad x \mapsto f(x)\ (x \in J^+)$$

siano da parti opposte rispetto alla retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$..

Si osservi che una funzione strettamente curva verso l'alto (o il basso) non possiede nessun punto di flesso.

Esempi

(1) Sia $p(x) = ax + b$ una funzione polinomiale di grado al piu' uno. Da una parte, si ha che la funzione derivata prima $p'(x) = a$ e' costante, dunque e' sia crescente che descrescente (non strettamente). Dall'altra, si ha che il grafico di p e' una retta, e dunque sta sia al di sopra che al di sotto delle sue tangenti (non strettamente). Dunque la funzione p e' sia curva verso l'alto che curva verso il basso (non strettamente).

(2) Sia $q(x) = ax^2 + bx + c$ una funzione polinomiale di grado due con $a > 0$. Da una parte, si ha che la funzione derivata prima $q'(x) = ax$ e' strettamente crescente. Dall'altra, si ha che il grafico di q e' una parabola conn concavita' rivolta verso l'alto, e dunque sta strettamente al di sopra delle sue tangenti. Dunque la funzione q e' strettamente curva verso l'alto. In modo analogo si vede che per $a < 0$ la funzione q e' strettamente curva verso il basso.

(3) Sia $r(x) = x^3$, e sia $c = 0$. La retta tangente al grafico di r in $(0, 0)$ e' l'asse x, e i grafici delle due restrizioni di r ai semiassi

$$x \mapsto x^3 \quad (x \in \mathbb{R}^-), \qquad x \mapsto x^3 \quad (x \in \mathbb{R}^+),$$

stanno il primo al di sotto ed il secondo al di sopra dell'asse x, dunque 0 e' un punto di flesso per r.

Per il riconoscimento degli intervalli in cui una funzione e' curva verso l'alto o il basso e la ricerca dei suoi punti di flesso si hanno i seguenti teoremi

Teorema 2 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte su un intervallo I, e sia c un punto interno ad I. Se c e' un punto di flesso per f, allora*

$$f''(c) = 0.$$

Teorema 3 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte su un intervallo I, con funzione derivata $f'' : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora:*

(1) f e' curva verso l'alto su I se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$;

(1') se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in I$, allora f e' strettamente curva verso l'alto su I;

(2) f e' curva verso il basso su I se e solo se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$;

(2') se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in I$, allora f e' strettamente curva verso il basso su I.

Esempi

(1) La derivata seconda di una potenza x^α ad esponente reale α ($x \in \mathbb{R}^+$) e' data da

$$D^2 x^\alpha = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}, \qquad (x \in \mathbb{R}^+).$$

Si osservi che $x^\alpha > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e che $\alpha(\alpha - 1)$ e' positivo per $\alpha < 0$ oppure $\alpha > 1$ e negativo per $0 < \alpha < 1$. Dunque: la funzione x^α e' strettamente curva verso l'alto se $\alpha < 0$ oppure $\alpha > 1$ ed e' strettamente curva verso il basso se $0 < \alpha < 1$.

(2) La derivata seconda della funzione esponenziale e^x ($x \in \mathbb{R}$) e' data da

$$D^2 e^x = e^x, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dunque la funzione e^x e' strettamente curva verso l'alto.

(3) La derivata seconda della funzione logaritmo $\log x$ ($x \in \mathbb{R}^+$) e' data da

$$D^2 \log x = -\frac{1}{x^2}, \qquad (x \in \mathbb{R}^+).$$

Dunque la funzione $\log x$ e' strettamente curva verso il basso.

(4) Le derivata seconda della funzione seno $\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) e' data da

$$D^2 \sin x = -\sin x, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dunque la funzione $\sin x$ negli intervalli in cui assume valori positivi e' strettamente curva verso il basso e negli intervalli in cui assume valori negativi e' strettamente curva verso l'alto, e nei punti in cui si annulla ha punti di flesso.

Coefficienti di un polinomio e sue derivate in un punto. Le derivate di polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

(un certo numero finito di termini) sono date da

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots \\ p''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + \cdots \\ p'''(x) &= 6a_3 + \cdots \\ &\vdots \\ p^{(k)}(x) &= k!a_k + \cdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni intero naturale k si ha

$$p^{(k)}(0) = k!a_k, \quad \text{cioe'} \quad a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

Dunque possiamo riscrivere il generico polinomio di grado n nella forma

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{1}{2}p''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(0)x^n.$$

Piu' in generale, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}p''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

formula di Taylor

Definizione 5 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un itervallo, e sia x_0 un punto interno ad I nel quale f e' derivabile n volte. Si dice polinomio di Taylor di ordine n di f con punto bsae x_0 il polinomio che ha in x_0 lo stesso valore e le stesse derivate di f fino all'ordine n, esplicitamente*

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Teorema 4 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un itervallo, e sia x_0 un punto interno ad I nel quale f e' derivabile n volte. Allora il valore $f(x)$ si puo' approssimare col valore del polinomio di Taylor di grado n di f con punto bsae x_0 compiendo un errore che tende a zero piu' velocemente di $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$, in simboli:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x_0, x),$$

dove

$$\frac{R_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} \to 0 \quad \textit{per } x \to x_0.$$

L'approssimazione e la proprieta' del resto si puo' scrivere anche

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + R_n(h),$$

dove

$$\frac{R_n(h)}{h^n} \to 0 \quad \text{per } h \to 0.$$

In particolare, per $n = 0, 1, 2$ si ha

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h) = f(x_0) + R_0(h), \qquad R_0(h) \to 0 \quad \text{per } h \to 0 \\
&f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(h), \qquad \frac{R_1(h)}{h} \to 0 \quad \text{per } h \to 0 \\
&f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + R_2(h), \qquad \frac{R_2(h)}{h^2} \to 0 \quad \text{per } h \to 0.
\end{aligned}$$

Esempio Per la funzione $\sqrt[5]{x}$ ($x \in \mathbb{R}^+$) ed il punto $x_0 = 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{1+h} &= 1 + R_0(h), \qquad \ldots \\
\sqrt[5]{1+h} &= 1 + \frac{1}{5}h + R_1(h), \qquad \ldots \\
\sqrt[5]{1+h} &= 1 + \frac{1}{5}h - \frac{2}{25}h^2 + R_2(h), \qquad \ldots
\end{aligned}$$