Derivate successive

Massimi, minimi e Polinomi di Taylor Per una funzione monomiale di secondo grado $x \mapsto ax^2$ ($a \neq 0$), si ha: per $a > 0$ il punto $x = 0$ e' di minimo globale stretto, e per $a < 0$ il punto $x = 0$ e' di massimo globale stretto. Questo fatto, mediante approssimazione con polinomi di Taylor, si trasporta ad una funzione derivabile due volte in un punto nel modo seguente

Teorema 1 *Siano date una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ e un punto c interno ad I nel quale f sia derivabile due volte, con $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$. Allora:*

(1) per $f''(c) > 0$, il punto c e' di minimo locale stretto per f;

(2) per $f''(c) < 0$, il punto c e' di massimo locale stretto per f.

Dimostrazione Diamo la dimostrazione della (1); quella della (2) e' analoga. La funzione f e' derivabile due volte in c, dunque

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + \frac{1}{2}f''(c)h^2 + R_2(h), \qquad \text{con} \quad \frac{R_2(h)}{h^2} \to 0 \ \text{ per } \ h \to 0;$$

essendo $f'(c) = 0$, si ha

$$f(c+h) = f(c) + \frac{1}{2}f''(c)h^2 + R_2(h), \qquad \text{con} \quad \frac{R_2(h)}{h^2} \to 0 \ \text{ per } \ h \to 0;$$

dunque

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h^2} = \frac{1}{2}f''(c) + \frac{R_2(h)}{h^2} \to \frac{1}{2}f''(c) > 0 \qquad \text{per } h \to 0;$$

ne segue che esiste un intorno I_0 di $h = 0$ tale che

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h^2} > 0, \qquad \forall\, h \in I_0,\ h \neq 0;$$

essendo $h^2 > 0$ cio' equivale a

$$f(c+h) - f(c) > 0, \qquad \forall\, h \in I_0,\ h \neq 0;$$

e cio' significa che c e' un punto di minimo stretto per f.

Per una funzione monomiale $x \mapsto ax^n$ ($a \neq 0$) di grado positivo n, si ha: per n dispari, il punto $x = 0$ non e' ne' di minimo ne' di massimo locale; per n pari e $a > 0$, il punto $x = 0$ e' di minimo globale stretto; per n pari e $a < 0$, il punto $x = 0$ e' di massimo globale stretto. Questo fatto, mediante approssimazione con polinomi di Taylor, si trasporta ad una funzione derivabile n volte in un punto nel modo seguente

Teorema 2 *Siano date una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ e un punto c interno ad I nel quale f sia derivabile n volte, con $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ e $f^{(n)}(c) \neq 0$. Allora:*

(1) per n dispari, il punto c non e' ne' di minimo ne' di massimo locale per f;

(2.1) per n pari e $f^{(n)}(c) > 0$, il punto c e' di minimo locale stretto per f;

(2.2) per n pari e $f^{(n)}(c) < 0$, il punto c e' di massimo locale stretto per f.

Esercizi

Esercizio (1) Usando il criterio derivante dalla formula di Taylor, determinare i punti di minimo e massimo locale per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Traccia di risoluzione.
f e' derivabile (un numero qualsiasi di volte) in ogni punto di $\mathbb{R}$, e

$$f'(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema di Fermat, i punti di massimo o minimo locale per f devono essere soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0;$$

dunque i possibili punti di massimo o minimo locale per f sono $0, 1, 2$. Per stabilire se lo sono e di che tipo sono, consideriamo

$$f''(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha:
$f''(0) = 0$ dunque per il momento non possiamo dire nulla su $x = 0$;
$f''(1) = -1$ dunque $x = 1$ e' un punto di massimo stretto per f;
$f''(2) = 4$ dunque $x = 2$ e' un punto di minimo stretto per f.
Per stabilire il tipo del punto $x = 0$ consideriamo

$$f'''(x) = 12x^2 - 18x + 4.$$

Si ha $f'''(0) = 4$ dunque $x = 0$ non e' ne' punto di massimo ne' punto di minimo locale per f.

Esercizio (1') Come nell'esercizio (1), ma per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio (2) Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo globale della funzione

$$g(x) = \cos x + \sin x, \qquad x \in [0, \pi].$$

Traccia di risoluzione.
g e' derivabile un numero qualsiasi di volte, in particolare e' continua, sull'intervallo chiuso e limitato $[0, \pi]$. Per il Teorema di Weierstrass, g ha almeno un punto di massimo globale ed almeno un punto di minimo golbale in $[0, \pi]$. Per il teorema di

Fermat, i punti di massimo o minimo globale per f che sono interni a $[0,\pi]$, che cioe' appartengono a $]0,\pi[$, devono essere soluzione dell'equazione

$$g'(x) = -\sin x + \cos x = 0;$$

c'e' dunque un solo tale punto ed e' $\frac{\pi}{4}$.
I possibili punti di massimo o minimo globale per g in $[0,\pi]$ sono 0, $\frac{\pi}{4}$ e π. Si ha

$$g(0) = 1, \quad g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}, \quad g(\pi) = -1;$$

dunque $\frac{\pi}{4}$ e' l'unico puunto di massimo globale e π e' l'unico punto di minimo globale per g nell'intervallo $[0,\pi]$.

Esercizio (2') Come nell'esercizio (2), ma con

$$g(x) = \cos x + \sin x, \qquad x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi].$$

Esercizio (3) Per la funzione

$$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 \qquad x \in \mathbb{R}$$

si determinino i limiti per x che tende a $-\infty$ e $+\infty$, gli intervalli in cui e' crescente o decrescente, e gli eventuali massimi e minimi locali. Si usino le informazioni trovate per stabilire quante soluzioni ha l'equazione,

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0,$$

e per dare informazioni sulla loro locazione.
Traccia di svolgimento.
$h(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$, e $h(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$.
h e' derivabile (un numero qualsiasi di volte) in ogni punto di $\mathbb{R}$, e

$$h'(x) = 6x^2 - 6x - 12, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Il segno di $h'(x)$ e gli intervalli nei quali h e' crescente/decrescente sono dati da

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 2 & \\ \hline h'(x) & + & 0 & - & 0 & + \\ h(x) & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array},$$

dunque: il punto $x = -1$ e' di massimo stretto per h, con $h(-1) = 15$; il punto $x = 2$ e' di minimo stretto per h, con $h(2) = -12$.
Abbiamo trovato che: $h(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$, h e' strettamente crescente su $]-\infty,-1]$, $h(-1) > 0$, h e' strettamente decrescente su $[-1,2]$, $h(2) < 0$, h e' strettamente crescente su $[2,+\infty[$, $h(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Da cio' e dal teorema dei valori intermedi, si ha che esiste uno ed un solo $x_1 \in]-\infty,-1]$ tale che $h(x_1) = 0$, esiste

uno ed un solo $x_2 \in [-1, 2]$ tale che $h(x_2) = 0$, esiste uno ed un solo $x_3 \in [2, +\infty[$ tale che $h(x_3) = 0$. Questi punti x_1, x_2, x_3 sono le soluzioni dell'equazione

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0.$$

Esercizio (3′) Come nell'esercizio (3), ma a partire dalla funzione

$$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 8 \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio (4) E' data la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x^3 - 9x^2 + 12x}.$$

Si determinino: i limiti di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$; gli intervalli in cui f e' crescente/decrescente; gli eventuali punti di massimo e minimo locali per f, specificando se siano globali o meno. Si dia una rappresentazione del grafico di f coerente con i risultati trovati. Si stabilisca se l'equazione $f(x) = e^{9/2}$ ha soluzioni e in caso affermativo quante.

La risoluzione di questo esercizio e' lasciata al lettore.