

Algebra delle matrici

Metodo di Gauss-Jordan per l'inversione di una matrice. Nella lezione scorsa abbiamo visto che un modo per determinare l'eventuale inversa di una matrice quadrata A consiste nel risolvere il sistema lineare generale ad essa associato $Ax = \mathbf{b}$ (\mathbf{b} colonna di parametri), esprimere la soluzione nella forma $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$, e infine prendere la matrice C .

Esempio. I Per determinare l'eventuale inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 16x + 4y + z = p \\ 9x + 3y + z = q \\ 4x + 2y + z = r \end{cases} \quad (p, q, r \text{ parametri } \in \mathbb{R});$$

questo sistema e' sempre determinato, con soluzione

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}p - q + \frac{1}{2}r \\ y = -\frac{1}{2}p + 6q - \frac{7}{2}r \\ z = 3p - 8q + 6r \end{cases} \quad (p, q, r \text{ parametri } \in \mathbb{R});$$

concludiamo che A e' invertibile e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Una versione piu' efficiente di questo metodo e' data nella seguente Proposizione; nel cui enunciato col termine "operazione elementare" sulle righe di una matrice intendiamo una delle seguenti operazioni: (1) sommare ad una riga un multiplo scalare di un'altra riga, (2) scambiare due righe, (3) moltiplicare una riga per uno scalare nonn nullo.

Proposizione 1 Una matrice A quadrata di ordine n e' invertibile se e solo se la matrice di tipo $n \times (2n)$

$$[A \mid I_n]$$

si puo' trasformare mediante una sequenza di operazioni elementari sulle righe in una matrice della forma

$$[I_n \mid C];$$

inoltre, in caso affermativo, si ha

$$C = A^{-1}.$$

Esempio. II Usando il metodo dato da questa proposizione, per determinare l'eventuale inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

consideriamo la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 16 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right];$$

questa matrice si può trasformare mediante operazioni elementari nella matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -8 & 6 \end{array} \right];$$

concludiamo che A è invertibile e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Proprietà dell'inversione di matrici. Dalla definizione di matrice inversa seguono direttamente le seguenti proprietà

(1) Per ogni data matrice invertibile, anche la sua matrice inversa è invertibile, ed ha per inversa la matrice data:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Infatti le stesse uguaglianze

$$AA^{-1} = I_n \quad A^{-1}A = I_n,$$

che esprimono rispettivamente il fatto che A^{-1} è inversa destra ed inversa sinistra di A , possono essere lette dicendo che A è inversa sinistra ed inversa destra di A^{-1} .

(2) Per ogni data coppia di matrici invertibili dello stesso ordine, anche la matrice loro prodotto è invertibile, ed ha per inversa la matrice prodotto della coppia delle inverse delle due matrici date, prese in ordine opposto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} ABB^{-1}A^{-1} &= AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n, \\ B^{-1}A^{-1}AB &= B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n. \end{aligned}$$

Potenze di una matrice. Sia A una matrice quadrata di ordine n . Per ogni intero relativo $p \in \mathbb{Z}$, la potenza p -ma della matrice A e' definita da

$$A^p = \begin{cases} A A \cdots A & (p \text{ volte}) & \text{per } p > 0 \\ I_n & & \text{per } p = 0 ; \\ A^{-1} A^{-1} \cdots A^{-1} & (-p \text{ volte}) & \text{per } p < 0 \end{cases}$$

la potenza con esponente zero non e' definita per la matrice nulla; le potenze con esponente negativo sono definite solo per matrici invertibili.

Valgono le proprieta' delle potenze

$$\begin{aligned} A^p A^q &= A^{p+q}; \\ (A^p)^q &= A^{pq}; \\ (AB)^p &= A^p B^p \quad (\text{sotto la condizione } AB = BA). \end{aligned}$$

Esempio:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Trasposizione di matrici. Matrici simmetriche. Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A ed indicata con A^T . In simboli, si ha:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Una matrice (quadrata) che coincide con la propria trasposta si dice "matrice simmetrica". Le matrici simmetriche quadrate del secondo ordine e del terzo ordine sono del tipo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A, & \text{per ogni } A; \\ (A+B)^T &= A^T + B^T, & \text{per ogni } A, B \text{ sommabili}; \\ (AB)^T &= B^T A^T, & \text{per ogni } A, B \text{ moltiplicabili}; \\ (rA)^T &= rA^T, & \text{per ogni } r \in \mathbb{R} \text{ ed ogni } A. \end{aligned}$$

Dimostriamo la proprietà relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

$$(AB)^T = B^T A^T$$

è consistente, cioè che le matrici ai due lati dell'uguaglianza hanno lo stesso tipo. Infatti: da un lato la matrice AB è definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice $(AB)^T$ ha tipo $p \times m$; dall'altro lato, la matrice B^T ha tipo $p \times n$, la matrice A^T ha tipo $n \times m$, e la matrice $B^T A^T$ è definita ed ha tipo $p \times m$. Proviamo ora che

$$\left((AB)^T \right)_{ij} = \left(B^T A^T \right)_{ij}, \quad i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned} \left((AB)^T \right)_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= \sum_{h=1}^n A_{jh} B_{hi}, \end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$\begin{aligned} \left(B^T A^T \right)_{ij} &= \sum_{h=1}^n \left(B^T \right)_{ih} \left(A^T \right)_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^n B_{hi} A_{jh}, \end{aligned}$$

e i due risultati sono uguali per la proprietà commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Matrici non singolari

In quest'ultima parte, dopo avere fatto un'osservazione sul prodotto di matrici, stabiliamo un teorema che riassume le relazioni fra le proprietà di una matrice quadrata espresse nei termini del determinante, del rango, delle equazioni, e dell'invertibilità.

Osservazione. Comunque siano date due matrici A di tipo $m \times n$ e B di tipo $n \times p$, considerando la matrice prodotto

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1*} B_{*1} & \dots & A_{1*} B_{*p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m*} B_{*1} & \dots & A_{m*} B_{*p} \end{bmatrix},$$

prima leggendo riga per riga e poi leggendo colonna per colonna si osserva che:

(1) ciascuna riga della matrice prodotto AB e' uguale al prodotto della corrispondente riga di A per l'intera matrice B :

$$(AB)_{i*} = A_{i*}B, \quad (i = 1, \dots, m);$$

in altri termini,

$$\begin{bmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_{1*}B \\ \vdots \\ A_{m*}B \end{bmatrix}$$

(2) ciascuna colonna della matrice prodotto AB e' uguale al prodotto dell'intera matrice A per la corrispondente colonna di B :

$$(AB)_{*j} = AB_{*j}, \quad (j = 1, \dots, p);$$

in altri termini,

$$A [B_{*1} \dots B_{*p}] = [AB_{*1} \dots AB_{*p}]$$

Matrici non singolari .

Teorema 1 Per una matrice A quadrata di ordine n le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) $\det(A) \neq 0$;
- (2) $\rho(A) = n$;
- (3) l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nell'incognita $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e' determinata;
- (4) per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nell'incognita $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e' determinata;
- (5) per ogni $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ l'equazione $AX = B$ nell'incognita $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e' determinata;
- (3') l'equazione $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}^T$ nell'incognita $\mathbf{x}^T \in (\mathbb{R}^n)^*$ e' determinata;
- (4') per ogni $\mathbf{b}^T \in (\mathbb{R}^n)^*$ l'equazione $\mathbf{x}^T A = \mathbf{b}^T$ nell'incognita $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^n)^*$ e' determinata;
- (5) per ogni $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ l'equazione $XA = B$ nell'incognita $X \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e' determinata;
- (6) esiste A^{-1} .

Si osservi che: la (3) e la (4) si possono esprimere rispettivamente nella forma "l'insieme delle colonne di A e' linearmente indipendente" e "l'insieme delle colonne di A e' una base di \mathbb{R}^n "; analogamente la (3') e la (4') si possono esprimere rispettivamente nella forma "l'insieme delle righe di A e' linearmente indipendente" e "l'insieme delle righe di A e' una base di $(\mathbb{R}^n)^*$ ".

Definizione 1 Una matrice quadrata si dice "matrice non singolare" se e solo se soddisfa una, e quindi ogni, condizione del teorema precedente.

Dimostrazione. Di seguito dimostriamo un insieme di implicazioni sufficiente a stabilire l'equivalenza di tutte le condizioni.

- Le implicazioni

$$(5) \Leftrightarrow (6) \Rightarrow (5')$$

si provano come segue. Supposto che esista A^{-1} , da una parte si ha

$$AX = B \text{ implica } A^{-1}AX = A^{-1}B \dots \text{ cioè } X = A^{-1}B,$$

e quest'ultima e' una soluzione in quanto $A(A^{-1}B) = \dots = B$; dall'altra parte si ha

$$XA = B \text{ implica } XAA^{-1} = BA^{-1} \dots \text{ cioè } X = BA^{-1},$$

e quest'ultima e' una soluzione in quanto $(BA^{-1})A = \dots = B$.

- Le implicazioni

$$(5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3), \quad (5') \Rightarrow (4') \Rightarrow (3')$$

sono ovvie. Infatti: la condizione (5), nel caso particolare in cui la matrice termine noto B e quindi la matrice incognita X sia un vettore colonna, diventa la condizione (4); la condizione (4), nel caso particolare in cui il vettore colonna \mathbf{b} sia il vettore colonna nullo, diventa la condizione (3); analogamente per (5'), (4'), (3').

- Le implicazioni

$$(3) \Leftrightarrow (3'), \quad (3) \Leftrightarrow (2), \quad (3') \Leftrightarrow (2).$$

coincidono con la Proposizione 2 all'inizio la parte svolta sui determinanti.

- Le implicazioni

$$(2) \Leftrightarrow (1).$$

coincidono con il Teorema 1 al termine della parte svolta sui determinanti.

- Le implicazioni

$$(3) \Rightarrow (4), \quad (3') \Rightarrow (4')$$

derivano dal fatto che un insieme di n vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di ordine n e' anche una base dello spazio vettoriale. Da quanto visto finora si ha dunque che le condizioni (1), (2), (3), (3'), (4), (4') sono fra loro equivalenti.

- Le implicazioni

$$(4) \Rightarrow (5), \quad (4') \Rightarrow (5')$$

si provano come segue. Supponiamo che sia soddisfatta la (4) e proviamo che e' soddisfatta la (5); data una qualsiasi matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, consideriamo l'equazione $AX = B$ nell'incognita $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$; questa equazione e' equivalente all'insieme delle n equazioni $AX_{*j} = B_{*j}$ nelle incognite $X_{*j} \in \mathbb{R}^n$ ($j = 1, \dots, p$); ciascuna di queste equazioni e' determinata per la condizione (4); dunque l'equazione $AX = B$ nell'incognita $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e' determinata. In modo analogo, supposta soddisfatta la (4') si prova che e' soddisfatta la (5'). Da quanto visto finora si ha dunque che le condizioni (1), (2), (3), (3'), (4), (4'), (5), (5') sono fra loro equivalenti.

- Le implicazioni

$$(5) \Rightarrow (6) \Leftarrow (5')$$

si provano come segue. Supponiamo che sia soddisfatta la (5) e dunque anche la (5') e proviamo che e' soddisfatta la (6). La (5) nel caso particolare $B = I_n$ assicura che l'equazione $AX = I_n$ nell'incognita $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha soluzione, cioe' che la matrice A ha un'inversa destra. La (5') nel caso particolare $B = I_n$ assicura che l'equazione $XA = I_n$ nell'incognita $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha soluzione, cioe' che la matrice A ha un'inversa sinistra. Ora, la matrice A avendo sia inversa sinistra che destra ha pure un'inversa bilatera. Da quanto visto finora si ha dunque che le condizioni (1), (2), (3), (3'), (4), (4'), (5), (5'), (6) sono fra loro equivalenti.