Successioni

Una successione di numeri reali e' una legge che associa a ogni numero naturale $n = 0, 1, 2, \ldots$ un numero reale a_n, in breve: e' una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Puo' essere rappresentata con l'insieme delle coppie ordinate

$$(0, a_0), \ (1, a_1), \ (2, a_2), \ \ldots$$

pensate come punti del piano (il grafico della successione), oppure puo' essere rappresentata come il movimento a scatti temporali discreti di un punto su una retta. Si e' interessati al comportamento dei termini a_n della successione per valori di n "grandi"; dunque a_n potrebbe senza danno essere definita solo per n maggiore-uguale ad un certo naturale.

Esempi

(1) la successione $a_n = \frac{1}{n}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, che puo' essere descritta informalmente scrivendo $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$

(2) la successione $b_n = 2n + 1$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, che puo' essere descritta informalmente scrivendo $(1, 3, 5, 7, \ldots)$

(3) la successione $c_n = (-1)^n$, $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, che puo' essere descritta informalmente scrivendo $(1, -1, 1, -1, \ldots)$.

Il concetto di limite per n che tende a $+\infty$ di una successione a_n $(n = k, k+1, \ldots)$ e' simile al concetto di limite per $x \to +\infty$ di una funzione $f(x)$ $(x \geq a)$.

Definizione 1 *Sia a_n $(n = k, k+1, \ldots)$ una successione di numeri reali.*

(1) Si dice che a_n tende a un numero reale ℓ per n che tende a $+\infty$, o che il il limite di a_n per n che tende a $+\infty$ e' uguale a ℓ, e si scrive

$$a_n \to \ell \ \ \text{per} \ \ n \to +\infty, \quad \text{o} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

se e solo se per ogni intorno I_ℓ di ℓ esiste un indice H tale che

$$a_n \in I_\ell, \quad \text{per ogni} \ \ n > H.$$

(2) Si dice che a_n tende a $+\infty$ per n che tende a $+\infty$, o che il il limite di a_n per n che tende a $+\infty$ e' uguale a $+\infty$, e si scrive

$$a_n \to +\infty \ \ \text{per} \ \ n \to +\infty, \quad \text{o} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

se e solo se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un indice H tale che

$$a_n > M, \quad \text{per ogni} \ \ n > H.$$

(3) In modo analogo si da senso alla locuzione "a_n tende a $-\infty$ per n che tende a $+\infty$."

Con riferimento all'esempio di sopra, per $n \to +\infty$ si ha che: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_n = 2n+1 \to +\infty$, c_n non tende ad alcun limite.

Alla teoria e pratica di calcolo sviluppata per i limiti per $x \to +\infty$ delle funzioni $f(x)$ ($x \geq a$) corrisponde un'analoga teoria e pratica di calcolo per i limiti per $n \to +\infty$ delle successioni a_n ($n = k, k+1, \ldots$). Un esempio elementare:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Integrali

Aree. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Sotto la condizione $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$, si ha che il grafico di f, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$ delimitano una parte di piano, che si dice "trapezoide di f su $[a,b]$"; precisamente, si ha

$$\text{Trapezoide di } f \text{ su } [a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Nel caso generale, in cui f assume sia valori positivi che negativi,
-i punti del piano che stanno al di sotto del grafico di f, al di sopra dell'asse x, e nella fascia compresa fra le rette $x = a$ e $x = b$ formano una parte di piano, che si puo' dire "trapezoide positivo di f su $[a,b]$".
-i punti del piano che stanno al di sopra del grafico di f, al di sotto dell'asse x, e nella fascia compresa fra le rette $x = a$ e $x = b$ formano una parte di piano, che si puo' dire "trapezoide negativo di f su $[a,b]$".

Di seguito mostriamo come a ciascuna funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ "abbastanza buona" (sostanzialmente continua) si possa associare un numero reale, detto "integrale (di Riemann) di f su $[a,b]$" ed indicato con

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx},$$

che per f non negativa dia l'area del trapezoide di f su $[a,b]$; in generale tale integrale dara' la differenza fra l'area del trapezoide positivo di f e l'area del trapezoide negativo di f.

Il punto di partenza e' il fatto che per certe funzioni non negative, quelle costanti a tratti, il trapezoide e' in realta' un'unione di rettangoli e quindi per tali funzioni l'integrale deve essere dato dalla somma dei prodotti delle basi per le corrispondenti altezze.

In realta' in questo modo si da una definzione di area, che estende la definizione della geometria elementare.

Somme di Cauchy-Riemann. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Per un qualsiasi intero positivo n, consideriamo: (1) una scelta di una suddivisione

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b,$$

dell'intervallo $[a,b]$ in n sottointervalli; (2) una scelta di n punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nel primo, secondo, ..., $n-$mo intervallo

$$a = a_0 \leq c_1 \leq a_1 \leq c_2 \leq a_2 < \cdots \leq a_{n-1} \leq c_n \leq a_n = b.$$

Diciamo 'somma di Cauchy-Riemann' di passo n della funzione f associata alla suddivisone $(a_i)_0^n$ e ai punti itermedi $(c_i)_1^n$ il numero reale

$$\begin{aligned} S(f;(a_i)_0^n;(c_i)_1^n) &= \sum_{i=1}^n f(c_i)(a_i - a_{i-1}) \\ &= f(c_1)(a_1 - a_0) + f(c_2)(a_2 - a_1) + \cdots + f(c_n)(a_n - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Osserviamo che se la suddivisione dell'intervallo e' uniforme, cioe' se tutti gli n sottointervalli hanno la stessa lunghezza, allora ciascun sottointervallo ha lunghezza $(b-a)/n$, e

$$S(f;(a_i)_0^n;(c_i)_1^n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i).$$

Diciamo che una somma di Cauchy-Riemann di questo tipo e' 'uniforme'.

Nel caso in cui f sia non negativa, la sommma di Cauchy-Riemann $S(f;(a_i)_0^n;(c_i)_1^n)$ e' uguale all'area del trapezoide della funzione costante a tratti $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(c_1) & \text{per } x \in [a_0, a_1[\\ f(c_2) & \text{per } x \in [a_1, a_2[\\ \vdots & \\ f(c_n) & \text{per } x \in [a_{n-1}, a_n] \end{cases}.$$

Definizione di integrale. I Una successione

$$S(f;(a_{10}, a_{11}); c_{11}),\ S(f;(a_{20}, a_{21}, a_{22}); (c_{21}, c_{22})),\ \ldots,\ S(f;(a_{ni})_0^n;(c_{ni})_1^n),\ \ldots$$

di somme di Cauchy-Riemann si dice 'ammissibile' se e solo se la successione

$$\alpha_n = \mathrm{Max}\{a_{n,1} - a_{n,0},\ a_{n,2} - a_{n,1},\ \ldots,\ a_{n,n} - a_{n,n-1}\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

delle massime ampiezze dei sottointervalli tende a zero per $n \to +\infty$. Si osservi che una successione di somme uniformi e' sempre ammissibile, in quanto per essa si ha $\alpha_n = \frac{b-a}{n}$ per ogni $n = 1, 2, \ldots.$

Teorema 1 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*
(1) ogni successione ammissibile di somme di Cauchy-Riemann di f ha limite finito per $n \to +\infty$;
(1) tutte le successioni ammissibili di somme Cauchy-Riemann di f hanno uno stesso limite.

Non diamo la dimostrazione di questo teorema.

Definizione 2 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Il limite comune al quale tendono tutte le successioni ammissibili di somme di Cauchy-Riemann di f si dice integrale (di Riemann) di f su $[a,b]$, e si indica con $\int_a^b f(x)\, dx$:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_{ni})(a_{n,i} - a_{n,i-1}).$$

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' una funzione continua non negativa, allora si pone

$$\text{Area del trapezoide di } f \text{ su } [a,b] = \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$$

Esempi La definizione di integrale da una parte ha una forma vicina all'intuizione e dall'altra permette lo sviluppo di una teoria; e' pero' piuttosto difficile da usare direttamente. Di seguito discutiamo gli esempi piu' semplici.

(1) Sia data una funzione costante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ per ogni $x \in [a,b]$. Per ciascun intero positivo n, per ciascuna suddivisione $(a_i)_0^n$ dell'intervallo $[a,b]$ in n sottointervalli, e per ciascuna scelta $(c_i)_1^n$ di punti intermedi, la corrispondente somma di Cauchy-Riemann e' data da

$$\begin{aligned} S(f;(a_i)_0^n;(c_i)_1^n) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(a_i - a_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \\ &= c(a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_n - a_{n-1}) = c(a_n - a_0) = c(b-a). \end{aligned}$$

Avendo tutte le somme di Cauchy-Riemann lo stesso valore $c(b-a)$, tale sara' anche il valore dell'integrale:

$$\int_a^b c\, \mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx} = \lim_{n\to+\infty} S(f;(a_i)_0^n;(c_i)_1^n) = \lim_{n\to+\infty} c(b-a) = c(b-a).$$

Numeri triangolari Prima di considerare un altro esempio, stabiliamo una formula chiusa (di Gauss, da bambino) per la somma dei primi n interi $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 +$

$\cdots + n$. Si ha

$$1+2+\cdots+n = \text{ numero di } x \text{ in } \begin{array}{l} x \\ xx \\ \vdots \\ xx\ldots x \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ numero di } x, y \text{ in } \begin{array}{c} xy\ldots yy \\ xx\ldots yy \\ \vdots \\ xx\ldots xy \end{array} = \frac{(n+1)n}{2}$$

(nella prima figura c'e' una disposizione triangolare di x su n righe ed n colonne; nella seconda figura c'e' una disposizione rettangolare di x e y in ugual numero su n righe ed $n+1$ colonne).

(2) Sia data la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ per ogni $x \in [0,1]$. Per ciascun intero positivo n, consideriamo la suddivisione uniforme $(a_i)_0^n$ dell'intervallo $[0,1]$ in n sottointervalli di ampiezza $\frac{1}{n}$, e la scelta degli n punti intermedi $(\frac{i}{n})_1^n$; la corrispondente somma di Cauchy-Riemann e' data da

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2n^2}.$$

Il valore dell'integrale e' dunque

$$\int_0^1 x \, \mathrm{dx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Proprieta'

Proposizione 1 *L'integrale di Riemann posside le seguenti proprieta'*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$
$$\int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx;$$

per ogni $c \in [a,b]$,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx;$$

se $f(x) \le g(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$, *allora*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

($f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funzioni continue,* $\alpha \in \mathbb{R}$*).*

Non diamo la dimostrazione di questa proposizione. Segnaliamo solo che si basa in prima battuta sulle analoghe proprieta' delle sommatorie:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(f_i+g_i) &= \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} g_i,\\
\sum_{i=1}^{n}(\alpha f_i) &= \alpha \sum_{i=1}^{n} f_i;\\
\sum_{i=1}^{m} f_i + \sum_{i=m+1}^{n} f_i &= \sum_{i=1}^{n} f_i;\\
\sum_{i=1}^{n} f_i &\le \sum_{i=1}^{n} g_i, \qquad (\text{se } f_i \le g_i \ \forall i).
\end{aligned}$$