Integrali

Convenzione Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I; abbiamo indicato l'integrale di f su un intervallo $[a, b] \subseteq I$ col simbolo $\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}$; poniamo ora

$$\int_b^a f(x)\, \mathrm{dx} = -\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}.$$

Con questa convenzione, si ha

$$\int_p^q f(x)\, \mathrm{dx} + \int_q^r f(x)\, \mathrm{dx} = \int_p^r f(x)\, \mathrm{dx}$$

per ogni $p, q, r \in I$, indipendentemente dalla loro posizione relativa.

Consideriamo la funzione valore assoluto

$$x \mapsto |x| \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Questa funzione e' continua su $\mathbb{R}$, dunque per ogni $x \in \mathbb{R}$ e' definito l'integrale $\int_0^x |t| \mathrm{dt}$, e si ha una funzione

$$x \mapsto \int_0^x |t| \mathrm{dt}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per il significato dell'integrale come area con segno si ha

$$\int_0^x |t| \mathrm{dt} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{per } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

Si osservi che la funzione $x \mapsto |x|$ e' continua su $\mathbb{R}$ (ma non derivabile in 0), e la funzione $x \mapsto \int_0^x |t| \mathrm{dt}$ e' derivabile su $\mathbb{R}$ (ma non due volte derivabile in 0). Inoltre si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \int_0^x |t| \mathrm{dt} = |x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Funzione integrale, I teorema fondamentale, Primitive, II Teorema fondamentale.

Definizione 1 *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ funzione continua su I intervallo, e $c \in I$ fissato. La funzione che a ciascun $x \in I$ associa l'integrale di f sull'intervallo $[c, x]$ viene detta "funzione integrale di f con punto base c", e viene indicata con $\mathcal{I}_{f;c}$; in simboli,*

$$\mathcal{I}_{f;c} : I \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{I}_{f;c}(x) = \int_c^x f(t)\, dt.$$

Teorema 1 (I Teorema fondamentale) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I, e $c \in I$. Allora la funzione integrale $\mathcal{I}_{f;c} : I \to \mathbb{R}$ e' derivabile su I, inoltre*

$$(\mathcal{I}_{f;c})'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Se le funzioni sono date mediante espressioni in variabili, e l'integrale e la derivata vengono visti come operatori su tali espressioni, allora l'enunciato del teorema si puo' scrivere nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\int_c^x f(t)\mathrm{dt}\right) = f(x).$$

Diamo piu' avanti la dimostrazione. Questo teorema suggerisce di dare la seguente

Definizione 2 *Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Si dice che una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I e' una primitiva di f se e solo se*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Si osservi che se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ possiede una primitiva $F : I \to \mathbb{R}$ allora tutte le funzioni $G : I \to \mathbb{R}$ del tipo $G = F + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante sono primitive di f. Infatti,

$$G' = (F + k)' = F' + k' = F' = f.$$

Vale anche il viceversa, come stabilito dal seguente

Teorema 2 *Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Se $F : I \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f, allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni $G : I \to \mathbb{R}$ del tipo $G = F + k$, con $k \in \mathbb{R}$ costante.*

Questo teorema e' una conseguenza diretta del teorema del valor medio; non lo dimostriamo.

Teorema 3 (II Teorema fondamentale). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una sua primitiva. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Spesso si pone $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ e si scive l'enunciato del teorema nella forma

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b.$$

Questo teorema deriva direttamente dai precedenti due. Infatti: per il I teorema fondamentale ciascuna funzione integrale di f e' una primitiva di f; per il precedente teorema ogni primitiva di f e' del tipo $F + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante; dunque in particolare si ha

$$\int_a^x f(t)\mathrm{dt} = F(x) + k, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Posto $x = a$ si ha $0 = \int_a^a f(t)\mathrm{dt} = F(a) + k$ da cui $k = -F(a)$; posto $x = b$ si ha

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = F(b) + k = F(b) - F(a).$$

Applicazioni. Il II Teorema fondamentale riconduce il problema del calcolo degli integrali al problema spesso piu' semplice della ricerca di una primitiva della funzione integranda. Nella lezione scorsa abbiamo calcolato l'integrale della funzione $x \mapsto x$ sull'intervallo $[0,1]$ usando la definizione. Di seguito mostriamo il calcolo degli integrali delle funzioni potenza ed altre usando il II teorema fondamentale.

(1) Ci proponiamo di calcolare

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{dx}$$

Una primitiva della funzione x^2 ($x \in \mathbb{R}$) e' $\frac{x^3}{3}$ ($x \in \mathbb{R}$), dunque

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{dx} = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(2) Per ciscun intero non negativo n,

$$\int_0^1 x^n \mathrm{dx} = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(3) L'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \mathrm{dx}$$

non ha senso. Infatti, la funzione $x \mapsto \frac{1}{x}$ non e' definita in $x = 0$, ed essendo $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ non puo' nemmeno essere definita in $x = 0$ in modo da essere continua in $x = 0$.

(3') Si ha

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{dx} = [\log x]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2;$$
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \mathrm{dx} = [\log(-x)]_{-2}^{-1} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

Si noti che la funzione $x \mapsto \log x$ e' una primitiva di $x \mapsto \frac{1}{x}$ su $[1,2]$, ma la funzione $x \mapsto \log x$ non e' una primitiva di $x \mapsto \frac{1}{x}$ su $[-2,-1]$, in quanto non e' definita per $x < 0$; invece la funzione $x \mapsto \log(-x)$ e' una primitiva di $x \mapsto \frac{1}{x}$ su $[-2,-1]$, in quanto e' definita su questo intervallo e $\mathrm{D} \log(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Dimostrazione del I Teorema Fondamentale. La dimostrazione del I Teorema fondamentale si basa sul seguente

Teorema 4 (della media integrale). *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' una funzione continua, allora esiste una $x^* \in]a,b[$ tale che*

$$f(x^*) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dimostrazione Per il teorema di Weierstass, la funzione f possiede in $[a, b]$ almeno un punto di minimo globale x_1 ed almeno un punto di massimo globale x_2. Dunque

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x_1)\mathrm{dx} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x_2)\mathrm{dx}$$

cioe'

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{dx} \leq f(x_2).$$

Per il teorema dei valori intermedi, esiste un $x*$ nell'intervallo di estremi x_1 e x_2 tale che

$$f(x^*) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{dx}.$$

Dimostrazione del II Teorema fondamentale Sia x_0 un qualsiasi punto in I.

1-l'incremento di $\mathcal{I}_{f;c}$ da x_0 a $x_0 + h$ e' dato da

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{f;c}(x_0+h) - \mathcal{I}_{f;c}(x_0) &= \int_c^{x_0+h} f(t)\mathrm{dt} - \int_c^{x_0} f(t)\mathrm{dt}\\ &= \int_c^{x_0+h} f(t)\mathrm{dt} + \int_{x_0}^{c} f(t)\mathrm{dt} = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{dt};\end{aligned}$$

2-il rapporto incrementale di $\mathcal{I}_{f;c}$ da x_0 a $x_0 + h$ e' dato da

$$\frac{\mathcal{I}_{f;c}(x_0+h) - \mathcal{I}_{f;c}(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{dt}}{h};$$

3-la funzione f e' continua sull'intervallo $[x_0, x_0 + h]$, dunque, per il teorema sulla media integrale, esiste un $x_h^* \in]x_0, x_0 + h[$ tale che

$$\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{dt}}{h} = f(x_h^*).$$

4-dai punti precedenti si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{I}_{f;c}(x_0+h) - \mathcal{I}_{f;c}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_h^*) = f(x_0);$$

l'ultimo passaggio segue dal fatto che $x_0 < x_h^* < x_0 + h$ ed f e' continua in x_0.