Integrali

Integrale Indefinito Per il II teorema fondamentale, il calcolo dell'integrale

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su un intervallo $[a,b]$, puo' essere ricondotto alla determinazione di una funzione $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitiva di f su $[a,b]$, in quanto

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Al posto di $F(b) - F(a)$ si usa scrivere $[F(x)]_a^b$, cosi'

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

L'insieme di tutte le funzioni primitive di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I viene detto integrale indefinito di f su I, e viene indicato con

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Per quanto visto in precedenza, se $F : I \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f su I, allora l'insieme $\int f(x)\, \mathrm{d}x$ coincide con l'insieme delle funzioni del tipo $F + k$, dove $k \in \mathbb{R}$; si usa scrivere $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + k$, $(k \in \mathbb{R})$, o in breve $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$.

Integrali indefiniti elementari:

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1}\mathrm{d}x = \log|x| + k$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + k$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + k$$

$$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + k$$

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x) + k$$

In ciascuna di queste uguaglianze, si intende che la funzione integranda e' considerata su un qualsiasi intervallo contenuto nel suo dominio di definizione, e su tale intervallo vengono considerate le sue primitive. Per l'ultimo integrale si veda l'ultimo paragrafo sulla derivazione delle funzini inverse.

Prime regole di integrazione Alle relazioni fra derivazione e operazioni algebriche

$$(f(x)+g(x))' = (f(x))' + (g(x))',$$
$$(\alpha f(x))' = \alpha\,(f(x))',$$

corrispondono le seguenti relazioni fra integrazione e operazioni algebriche

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Inoltre, dalla regola di derivazione delle funzioni composte

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

segue che

$$\int f'(g(x))g'(x)\mathrm{dx} = f(g(x)) + k.$$

In particolare, si ha

$$\int e^{g(x)} g'(x)\mathrm{dx} = e^{g(x)},$$
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{dx} = \ln|g(x)|.$$
$$\int \cos(g(x))g'(x)\mathrm{dx} = \sin(g(x)),$$
$$\int \sin(g(x))g'(x)\mathrm{dx} = -\cos(g(x))$$

Esempi

$$\int \left(\frac{3}{x} + 5 + 7x + 11x^2\right)\mathrm{dx} = 3\log|x| + 5x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{11}{3}x^3 \tag{1}$$
$$\int \left(\frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^2}\right)\mathrm{dx} = \int \left(5x^{-3} + 7x^{-2}\right)\mathrm{dx} = 5\,\frac{x^{-2}}{-2} + 7\,\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{5}{2x^2} - \frac{7}{x} \tag{2}$$
$$\int \frac{1}{2x+3}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln|2x+3| \tag{3}$$
$$\int \frac{1}{(5x+3)^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{5}\int \frac{5}{(5x+3)^2}\mathrm{dx} = -\frac{1}{5}\,\frac{1}{5x+3} \tag{4}$$
$$\int \frac{3x+1}{15x^2+10x+7}\mathrm{dx} = \frac{1}{10}\int \frac{30x+10}{15x^2+10x+7}\mathrm{dx} = \frac{1}{10}\ln|15x^2+10x+7| \tag{5}$$
$$\int \frac{1}{3x^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x)^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) \tag{6}$$
$$\int \frac{4x+5}{2x+3}\mathrm{dx} = \int \frac{4x+6-1}{2x+3}\mathrm{dx} = \int (2 - \frac{1}{2x+3})\mathrm{dx} = 2x - \frac{1}{2}\ln|2x+3| \tag{7}$$

Altri esempi

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \sqrt{x}\right)\mathrm{dx} = \int \left(x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{dx} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \tag{8}$$

$$\int e^{-x^2} 2x\mathrm{dx} = -\int e^{-x^2}(-2x)\mathrm{dx} = -e^{-x^2} \tag{9}$$

$$\int e^{5x^3} 7x^2\mathrm{dx} = \frac{7}{15}\int e^{5x^3} 15x^2\mathrm{dx} = \frac{7}{15}e^{5x^3} \tag{10}$$

$$\int \cos(x^{-1})x^{-2}\mathrm{dx} = -\int \cos(x^{-1})(-x^{-2})\mathrm{dx} = -\sin(x^{-1}) \tag{11}$$

Appendice. Derivazione delle funzioni inverse

Teorema 1 *Per una funzione $f : I \to J$ suriettiva derivabile, con I e J intervalli, le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(1) esiste $f^{-1} : J \to I$ derivabile;
(2) f' non si annulla ed ha segno costante su I.
Inoltre, in caso affermativo si ha

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \qquad \forall x \in J.$$

La dimostrazione si basa sui seguenti fatti:
(1) una funzione continua su un intervallo e' invertibile se e solo se e' strettamente monotona (crescente o decrescente) sull'intervallo,
(2) una funzione derivabile su un intervallo e' debolmente monotona (crescente o decrescente) se e solo se la funzione derivata ha segno costante (debolmente positivo o debolmente negativo) sull'intervallo.
(3) se esiste f^{-1} ed e' derivabile, allora dall'uguaglianza

$$f(f^{-1}(x)) = x, \qquad \forall x \in J$$

per la regola di derivazione delle funzioni coposte si ha

$$f'(f^{-1}(x))\ (f^{-1})'(x) = 1, \qquad \forall x \in J$$

da cui

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \qquad \forall x \in J.$$

Cio' che andrebbe provato (e non proviamo) e' che la condizione (2) implica che f^{-1} e' derivabile.

Se le funzioni si pensano come espressioni e la derivazione come un'operatore che trasforma tali espressioni, allora la regola per la derivazione della funzione inversa si esprime nella forma "la derivata della funzione inversa della fuunzione $f(x)$ e' uguale al reciproco della funzione ottenuta derivando $f(x)$ e sostituendo alla variabile x l'espressione $f^{-1}(x)$" e si scrive nella forma

$$\mathrm{D}\, f^{-1}(x) = \frac{1}{[\mathrm{D}\, f(x)]_{x \leftarrow f^{-1}(x)}}.$$

Di seguito riportiamo alcuni esempi.
(1) Applicando il teorema alla funzione esponenziale $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ si ottiene per la funzione inversa logaritmo $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, la nota formula:

$$\mathrm{D}\ \log x = \frac{1}{[\mathrm{D}\ \exp x]_{x \leftarrow \log x}} = \frac{1}{[\exp x]_{x \leftarrow \log x}} = \frac{1}{\exp\,(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(2) Applicando il teorema alla funzione tangente $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ si ottiene per funzione inversa arcotangente $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ la formula seguente:

$$\mathrm{D}\ \arctan x = \frac{1}{[\mathrm{D}\ \tan x]_{x \leftarrow \arctan x}} = \frac{1}{[1 + \tan^2 x]_{x \leftarrow \arctan x}} = \frac{1}{1 + \tan^2\,(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$