Autovettori e autovalori

In questa parte studiamo le funzioni lineari $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; per quanto visto nella lezione scorsa, queste sono le funzioni del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(con a_{ij} costanti in $\mathbb{R}$), in breve

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}, \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

dove A e' una matrice quadrata di ordine n. Fra queste, le funzioni piu' semplici sono quelle del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(con d_h costanti in $\mathbb{R}$), in breve

$$\mathbf{x} \mapsto D\mathbf{x}, \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

dove D e' una matrice quadrata diagonale di ordine n. Vedremo come si possa eventualmente ricondurre lo studio di una funzione lineare associata ad una matrice quadrata allo studio di una funzione lineare associata ad una matrice diagonale.

Autovettori e autovalori

(1) Consideriamo la matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e la funzione lineare $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ ad essa associata. Osserviamo che

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque, si hanno le relazioni

$$A\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{e}_2 = 3\mathbf{e}_2;$$

queste relazioni caratterizano completamente la funzione, e si si ha

$$A\mathbf{x} = A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 = 2x_1\mathbf{e}_1 + 3x_2\mathbf{e}_2.$$

(2) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

e la funzione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ ad essa associata. Si ha

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dunque, posto

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

si hanno le relazioni

$$A\mathbf{v}_1 = 5\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2.$$

I vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono una base di $\mathbb{R}^2$, cosi' ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{x} = z_1\mathbf{v}_1 + z_2\mathbf{v}_2 \qquad (z_i \in \mathbb{R}).$$

Allora le relazioni di sopra caratterizano completamente la funzione, e si ha

$$A\mathbf{x} = A(z_1\mathbf{v}_1 + z_2\mathbf{v}_2) = z_1 A\mathbf{v}_1 + z_2 A\mathbf{v}_2 = 5z_1\mathbf{v}_1 + 2z_2\mathbf{v}_2.$$

Definizione 1 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si dice autovettore di A se e solo se il vettore $A\mathbf{v}$ e' un multiplo scalare di $\mathbf{v}$. In tal caso, esiste uno ed un solo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v};$$

questo scalare si dice autovalore di A associato all'autovettore $\mathbf{v}$. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice autovalore di A se e solo se e' l'autovalore di A associato a un qualche autovettore di A.

L'unicita' dell'autovalore associato ad un autovettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ si prova come segue:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \text{ e } A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}, \ (\lambda - \mu)\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ da cui } \lambda - \mu = 0, \ \lambda = \mu.$$

Riconsideriamo gli esempi precedenti in base a questa definizione.

(1') I vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ sono autovettori della matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

con autovalori associati 2 e 3, rispettivamente.

(2′) I vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

con autovalori associati 5 e 2, rispettivamente.

Polinomio caratteristico

Teorema 1 *Sia A una matrice quadrata di ordine n; per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ le seguenti condizioni sono equivalenti*
(1) λ e′ un autovalore di A;
(2) l′equazione $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha qualche soluzione $\neq \mathbf{0}$;
(3) $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Dimostrazione
Equivalenza fra le condizioni (1) e la (2). λ e′ un autovalore di A se e solo se

$$\begin{array}{l} \text{esiste un } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \text{tale che} \quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \text{cioe}' \\ \text{esiste un } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \text{tale che} \quad (\lambda I_n - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \text{cioe}' \\ \text{l'equazione} \quad (\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{ha qualche soluzione} \quad \neq \mathbf{0}. \end{array}$$

Equivalenza fra le condizioni (2) e la (3). Dal teorema di caratterizzazione delle matrici non singolari si ha in particolare che un′equazione $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha qualche soluzione $\neq \mathbf{0}$ se e solo se $\det B = 0$.

Definizione 2 *Per ogni matrice A quadrata di ordine n, e il polinomio*

$$\det(\lambda I_n - A)$$

(nell′indeterminata λ) si dice polinomio caratteristico di A.

Per una qualsiasi matrice A quadrata di ordine 2 si ha

$$\lambda I_2 - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix};$$

e il polinomio caratteristico di A e′

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{21}a_{12} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Per una qualsiasi matrice A quadrata di ordine n, il polinomio caratteristico di A ha grado n, con coefficiente di λ^n uguale a 1,

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

inoltre il termine costante e' $c_n = (-1)^n \det A$. In particolare, l'equazione

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$$

ha al piu' n radici (reali o complesse). Dunque

> Una matrice quadrata di ordine n ha al piu' n autovalori (reali o complessi).

Esempio

(2'') Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico e'

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-3) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

I suoi autovalori sono le soluzioni dell'equazione nell'incognita λ

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,$$

cioe' sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 2$.

Gli autovettori cui e' associato l'autovalore $\lambda_1 = 5$ sono le soluzioni dell'equazione nell'incognita $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$A\mathbf{x} = 5\mathbf{x}, \quad (5I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

sono dunque tutti e soli i vettori del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = p\mathbf{v}_1, \qquad p \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Gli autovettori cui e' associato l'autovalore $\lambda_2 = 2$ sono le soluzioni dell'equazione nell'incognita $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}, \quad (2I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad -2x_1 - x_2 = 0;$$

sono dunque tutti e soli i vettori del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ -2q \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = q\mathbf{v}_2, \qquad q \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Autospazi Sia A una matrice quadrata di ordine n, e sia λ_* un suo autovalore. Allora l'insieme costituito degli autovettori di A cui e' associato l'autovalore λ_* e dal vettore nullo

$$V_{\lambda_*} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ A\mathbf{x} = \lambda_* \mathbf{x}\} == \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ (\lambda_* I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ non ridotto al vettore nullo, che si dice "autospazio di A associato all'autovalore λ_*."