Integrali

Integrazione per parti Alla relazione fra derivazione e prodotto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

corrisponde la seguente relazione fra integrazione e prodotto

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) \mathrm{d}x = f(x)g(x),$$

cioe'

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x),$$

che puo' essere riscritta

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x,$$

o

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Questa formula viene detta formula di integrazione per parti. L'uso tipico e' il seguente. Si vuole integrare una funzione $h(x)$; per ogni scrittura di $h(x)$ del tipo $h(x) = f'(x)g(x)$, la formula permette di ricondurre l'integrazione di $h(x)$ alla integrazione della funzione $f(x)g'(x)$; l'applicazione della formula ha successo se quest'ultima funzione e' piu' facile da integrare della prima.

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int xe^x \mathrm{d}x$.

Tentativo 1.

$$\int \underbrace{x}_{\mathrm{f}'}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}}\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'}\mathrm{d}x;$$

con i metodi e i fatti finora disponibili non sappiamo integrare la funzione $\frac{x^2}{2}e^x$, il tentativo non ha avuto successo.

Tentativo 2.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'}\mathrm{d}x &= \underbrace{x}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{1}_{\mathrm{f}'}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}}\mathrm{d}x \\ &= xe^x - e^x = (x-1)e^x.\end{aligned}$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int x^2e^x \mathrm{d}x$.

Si ha

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'}\mathrm{d}x &= \underbrace{x^2}_{\mathrm{f}}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{2x}_{\mathrm{f}'}\underbrace{e^x}_{\mathrm{g}}\mathrm{d}x \\ &= x^2e^x - 2(x-1)e^x = (x^2-2x+2)e^x.\end{aligned}$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int \log x \, \mathrm{d}x$.

Si ha

$$\int \log x \, \mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_{g} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{f} \underbrace{\log x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \, \mathrm{d}x$$
$$= x \log x - x = x(\log x - 1).$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int x \log x \, \mathrm{d}x$.
Si ha

$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\log x}_{g} \, \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \underbrace{\log x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \, \mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{x^2}{2} \log x - \tfrac{x^2}{4} = \tfrac{x^2}{2}(\log x - \tfrac{1}{2}).$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int x \cos x \, \mathrm{d}x$.
Si ha

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\cos x}_{g'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g} \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x.$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale $\int \frac{1}{x} \log x \, \mathrm{d}x$.
Direttamente, senza usare l'integrazione per parti, si ha

$$\int \frac{1}{x} \log x \;\; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int 2 \frac{1}{x} \log x \;\; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \log^2 x.$$

Si lascia al lettore di verificare la correttezza dei risultati ottenuti.

Operando come sopra si possono calcolare tutti gli integrali del tipo

$$\int x^n e^x \, \mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}; \qquad \int x^\alpha \log x \, \mathrm{d}x, \qquad \alpha \in \mathbb{R};$$
$$\int x^n \sin x \, \mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}; \qquad \int x^n \cos x \, \mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Integrazione per sostituzione Il comportamento dell'integrale rispetto alla sostituzione di variabili e' descritto dalla seguente

Proposizione 1 *Siano*
$f(x)$ *(*$x \in I$*) una funzione continua su un intervallo* I*, e* $\alpha, \beta \in I$*;*
$g(u)$ *(*$u \in J$*) una funzione derivabile con derivata continua su un intervallo* J *tale che* $g(J) \subset I$*, e* $a, b \in I$ *tali che* $g(a) = \alpha$*,* $g(b) = \beta$*.*
Allora

$$\int_\alpha^\beta f(x) \, dx = \int_a^b f(g(u)) g'(u) \, du.$$

Questa proposizione puo' essere descritta dicendo che, sotto le condizioni poste, alla sostituzione di variabili $x = g(u)$ ed alla scelta dei punti a, b nel dominio di g corrispondono le seguenti trasformazioni che lasciano invariato l'integrale:

1-dalla funzione $f(x)$ alla funzione $f(g(u))$;
2-da dx a d$g(u) = g'(u)$du;
3-dagli estremi di integrazione $x = \alpha$ e $x = \beta$ agli estremi di integrazione $u = a$ e $u = b$.

Esempio. Si voglia calcolare l'integrale

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, \mathrm{dx}.$$

Scegliamo il cambiamento di variabili $x = u^2$ e i punti $u = 1$ e $u = 2$. Queste scelte sono ammissibili in quanto: (1) la funzione u^2 ($u \in \mathbb{R}$) e' derivabile con derivata continua e la sua immagine e' contenuta nel, anzi coincide col, dominio della funzione $e^{\sqrt{x}}$ ($x \in [0, +\infty[$); (2) ai valori $u = 1$ e $u = 2$ della variabile u corrispondono i valori $x = 1$ e $x = 4$ della variabile x. Dunque si ha

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, \mathrm{dx} = \int_1^2 e^{\sqrt{u^2}} 2u\, \mathrm{du} = \int_1^2 e^{u} 2u\, \mathrm{du};$$

quest'ultimo integrale puo' essere calcolato per parti.

Osserviamo che la scelta del cambiamento di variabili $x = u^2$ e dei punti $u = -1$ e $u = 2$ e' ugualmente ammissibile, ma porta ad un integrale

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, \mathrm{dx} = \int_{-1}^2 e^{\sqrt{u^2}} 2u\, \mathrm{du} = \int_{-1}^2 e^{|u|} 2u\, \mathrm{du}$$

che e' piu' complicato.

Integrali generalizzati. Abbiamo definito l'integrale di Riemann per una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato, e nel caso di una funzione non negativa, abbiamo definito tale integrale come area del trapezoide associato alla funzione. Di seguito mostriamo come queste definizioni si possono generalizzare a intervalli qualsiasi. Sottolineiamo che l'integrale generalizzato non e' sempre definto, e quando e' definito puo' essere un numero reale, $+\infty$ o $-\infty$.

Definizione 1 *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua; si dice che f e' integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se e solo se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di f su $[a, b[$ per $b \to +\infty$; l'eventuale limite si dice integrale generalizzato (di Riemann) di f su $[a, +\infty[$; si pone*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Se f e' non negativa, si definisce area del trapezoide di f su $[a, +\infty[$ il numero reale dato da questo integrale.
Un'analoga definizione si da' per una funzione continua $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

Esempi.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\, dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} [\log x]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \log b = +\infty \\
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} [-\frac{1}{x}]_1^b = \lim_{b\to+\infty} (-\frac{1}{b}+1) = 1 \\
\int_0^{+\infty} \cos x\, dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \cos x\, dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} [\sin x]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \sin b \quad \text{non esiste}
\end{aligned}$$

Dai primi due integrali generalizzati si ha che
-l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x}$ ($x \in [1, +\infty[$) e' $+\infty$,
-l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x^2}$ ($x \in [1, +\infty[$) e' 1.

Definizione 2 *Sia $f\ :]a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua; si dice che f e' integrabile in senso generalizzato su $]a,b]$ se e solo se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di f su $[c,b]$ per $c \to a^+$; l'eventuale limite si dice integrale generalizzato (di Riemann) di f su $]a,b]$; si pone*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

Se f e' non negativa, si definisce area del trapezoide di f su $]a,b]$ il numero reale dato da questo integrale.
Un'analoga definizione si da' per una funzione continua $f : [a,b[\to \mathbb{R}$.

L'uso tipico di questo integrale si ha nel caso in cui la funzione f non puo' essere estesa con continuita' sull'intervallo chiuso $[a,b]$, in particolare nel caso in cui $f(x)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$ per x che tende ad uno dei due estremi.

Esempi.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx &= \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\, dx \\
&= \lim_{c\to 0^+} [\log x]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} (-\log c) = +\infty \\
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \lim_{c\to 0^+} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} 2(1-\sqrt{c}) = 2
\end{aligned}$$

Dunque:

-l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x}$ ($x \in]0,1]$) e' $+\infty$,
-l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x^2}$ ($x \in]0,1]$) e' 2.
Combinando queste due definizioni si ottengono quelle nei restanti casi.

Definizione 3 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua; si dice che f e' integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ se e solo se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di f su $[a, b]$ per $a \to -\infty$ e $b \to +\infty$; l'eventuale limite si dice integrale generalizzato (di Riemann) di f su $\mathbb{R}$; si pone*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

Se f e' non negativa, si definisce area del trapezoide di f su $\mathbb{R}$ il numero reale dato da questo integrale.
Un'analoga definizione si da' per una funzione continua $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

Nello stesso contesto di questa definizione, si prova che per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx;$$

inoltre, se f e' non negativa, si prova che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)dx,$$

Esempio.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx &= \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \lim_{c\to+\infty} [\arctan x]_{-c}^{c} = \lim_{c\to+\infty} 2\arctan c = 2\frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Dunque l'area del trapezoide della funzione $\frac{1}{x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$) e' π.