Autovettori e autovalori

Matrici semisemplici Sia A una matrice quadrata di ordine n, e sia $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ la funzione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ad essa associata. Supponiamo che esistano n autovettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ di A che sono una base di $\mathbb{R}^n$ e che $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, siano i rispettivi autovalori. Allora A agisce in modo semplice sui vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ precisamente

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1, \ \ldots, \ A\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n,$$

ed A agisce in modo abbastanza semplice anche su ogni vettore di $\mathbb{R}^n$; infatti ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo nella forma

$$z_1\mathbf{v}_1 + \cdots + z_n\mathbf{v}_n, \qquad (z_i \in \mathbb{R})$$

e

$$A(z_1\mathbf{v}_1 + \cdots + z_n\mathbf{v}_n) = \lambda_1 z_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n z_n \mathbf{v}_n.$$

Definizione 1 *Una matrice A quadrata di ordine n si dice semisemplice se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A.*

Le matrici considerate nella lezione precedente sono semisemplici. Di seguito mostriamo due esempi di matrici non semisemplici.

(1) Una matrice puo' essere non semisemplice perche' non possiede alcun autovalore (reale) e dunque non possiede alcun autovettore (reale). Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

e dunque non ha autovalori (reali).

(2) Una matrice puo' essere non semisemplice perche' non possiede abbastanza autovettori. Ad esempio, la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico

$$\det(\lambda I_2 - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

e dunque ha l'unico autovalore $\lambda = 1$. L'autospazio V_1 associato all'autovalore 1 e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione $B\mathbf{x} = \mathbf{x}$, cioe' $(I_2 - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cioe'} \quad x_2 = 0;$$

dunque tutti gli autovettori di B stanno sul primo asse coordinato, e due qualsiasi di essi generano al massimo il primo asse coordinato, non $\mathbb{R}^2$.

Proprieta' degli autovettori.

Teorema 1 *Sia A matrice quadrata di ordine n. Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono autovettori di A con autovalori associati $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a due a due distinti, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti.*

Da questo teorema, e dal fatto che n vettori linearmente indipedenti in $\mathbb{R}^n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$, segue direttamente il

Teorema 2 *Se una matrice A quadrata di ordine n possiede n autovalori distinti, allora A e' semisemplice.*

Applicazione. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$\det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -4 & -6 \\ 0 & \lambda - 2 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

dunque A ha i tre autovalori distinti $1, 2, 3$. Per il primo teorema, comunque si prendano tre autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di A associati rispettivamente agli autovalori $1, 2, 3$ si ha che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, e dunque sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Matrici simmetriche Abbiamo enunciato che per una qualsiasi matrice, autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti; per una qualsiasi matrice simmetrica si ha qualcosa di piu':

Proposizione 1 *Sia A una matrice quadrata di ordine n, (reale e) simmetrica. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono autovettori di A con autovalori associati λ e μ distinti, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali.*

Questo proposizione e' uno degli ingredienti del seguente

Teorema 3 (Teorema Spettrale). *Se una matrice A quadrata di ordine n e' (reale e) simmetrica, allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A; in particolare, A e' semisemplice.*

Esempio. Consideriamo la matrice reale simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

La matrice caratteristica di A e'

$$\lambda I_3 - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-10 \end{bmatrix},$$

e il polinomio caratteristico di A e'

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-10) - 9(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)((\lambda-2)(\lambda-10)-9) = \ldots \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda-11), \end{aligned}$$

dunque gli autovalori di A sono: $\lambda = 1$ con molteplicita' due e $\lambda = 11$ con molteplicita' uno.

L'autospazio V_1 associato all'autovalore 1 e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, cioe' $(I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cioe'} \quad \begin{cases} -x_1 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 9x_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{o} \quad x_1 + 3x_3 = 0;$$

questa equazione ha soluzioni del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3q \\ p \\ q \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad p, q \in \mathbb{R};$$

in particolare, una base di V_1 e' data dai vettori

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'autospazio V_{11} associato all'autovalore 11 e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione $A\mathbf{x} = 11\mathbf{x}$, cioe' $(11I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, esplicitamente

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cioe'} \quad \begin{cases} 9x_1 - 3x_3 = 0 \\ 10x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{o} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases};$$

questo sistema ha soluzioni del tipo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 3r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad r \in \mathbb{R};$$

in particolare, una base di V_{11} e' data dal vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Abbiamo dunque ottenuto i tre autovettori

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che sono a due a due ortogonali (il fatto che i primi due lo siano e' un caso, mentre il fatto che i primi due siano ortogonali al terzo non e' un caso, deriva dalla premessa al teorema spettrale), dunque sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; normalizzando questi vettori si trovano tre autovettori di A che sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Una matrice semisemplice A quadrata di ordine n assomiglia ad una matrice diagonale nel senso che esiste una base di $\mathbb{R}^n$ sulla quale A agisce cosi' come una matrice diagonale agisce sulla base canonica. Nel seguito rendiamo piu' precisa questa affermazione.

Ci sara' utile il seguente fatto:

(1) il prodotto di una matrice diagonale $n \cdot n$ avente elementi diagonali $d_1, \ldots, d_n$ per una matrice $n \cdot p$ avente righe $A_{1*}, \ldots, A_{n*}$ e' la matrice $n \cdot p$ avente righe $d_1 A_{1*}, \ldots, d_n A_{n*}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{n*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 A_{1*} \\ \vdots \\ d_n A_{n*} \end{bmatrix};$$

(2) il prodotto di una matrice $p \cdot n$ avente colonne $A_{*1}, \ldots, A_{*n}$ per una matrice diagonale $n \cdot n$ avente elementi diagonali $d_1, \ldots, d_n$ e' la matrice $p \cdot n$ avente colonne $d_1 A_{*1}, \ldots, d_n A_{*n}$.

$$[A_{*1} \ \ldots \ A_{*n}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = [d_1 A_{*1} \ \ldots \ d_n A_{*n}].$$

Fatto basilare. Siano A una matrice quadrata di ordine n, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Le seguenti due condizioni sono equivalenti:
(1) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono autovettori di A con autovalori associati $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, cioe'

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1, \ \ldots, \ A\mathbf{v}_n = \lambda_n$$

(2) $[A\mathbf{v}_1 \ \ldots \ A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \ldots \ \lambda_n\mathbf{v}_n]$ cioe'

$$A\,[\mathbf{v}_1 \ \ldots \ \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1 \ \ldots \ \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

cioe'

$$AP = PD,$$

dove P e' la matrice con colonne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ e D e' la matrice diagonale con elementi diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Inoltre, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ e' una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se P e' non singolare; in questo caso dall'uguaglianza di sopra si puo' ricavare

$$A = PDP^{-1}.$$

Infine, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ e' una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se P e' ortogonale; in questo caso si ha

$$A = PDP^T.$$

Matrici simili, matrici diagonalizzabili.

Definizione 2 *Siano A e B due matrici quadrate di uno stesso ordine n. Si dice che A e' simile a B se e solo se esiste una matrice P quadrata di ordine n non singolare tale che $A = PDP^{-1}$.*

Definizione 3 *Una matrice quadrata di dice diagonalizzabile se e solo se e' simile ad una matrice diagonale.*

Approfondendo un poco le considerazioni del paragrafo precedente si ottiene il

Teorema 4 *Per una matrice A quadrata di ordine n, una matrice P con colonne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, una matrice diagonale D con elementi diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(1) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ e' una base di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di A con autovalori associati $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$;
(2) $A = PDP^{-1}$.
In particolare, A e' semisemplice se e solo se A e' diagonalizzabile.