# Spazio vettoriale Euclideo

Nell'insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate, o vettori ad $n$ componenti, di numeri reali abbiamo definito la somma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ di due vettori e il prodotto $\alpha\mathbf{v}$ di uno scalare per un vettore; la struttura cosi' ottenuta l'abbiamo nominata "spazio vettoriale $n-$dimensionale standard". Questo spazio vettoriale e' il modello per ogni spazio vettoriale finitamente generato, o che e' lo stesso, per ogni spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$. Nell'insieme $\mathbb{R}^n$ abbiamo poi definito il prodotto scalare $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ di due vettori; la struttura cosi' ottenuta viene nominata "spazio vettoriale Euclideo $n-$dimensionale standard." In effetti a partire dal prodotto scalare abbiamo definito nozioni euclidee come la relazione di ortogonalita' $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ fra due vettori e la lunghezza o norma $\|\mathbf{u}\|$ di un vettore. In questa lezione mostriamo che l'ortogonalita' e la norma cosi' definite in $\mathbb{R}^n$ continuano a possedere le proprieta' salienti che posseggono nel piano e spazio Euclideo ordinari.

### Proprieta' dell'ortogonalita'

**Proposizione 1** *La relazione di ortogonalita' su $\mathbb{R}^n$ possiede le seguenti proprieta':*
*(1) Il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ e' ortogonale a se' stesso ed e' l'unico vettore di $\mathbb{R}^n$ che e' ortogonale a se' stesso:*

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{u} \quad \textit{se e solo se} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

*per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$;*
*(2) La relazione di ortogonalita' e' simmetrica:*

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \textit{se e solo se} \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{u};$$

*per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$;*
*(3) La relazione di ortogonalita' e' compatibile con le operazioni di somma di vettori e prodotto di scalari per vettori:*

$$\begin{array}{lll} \textit{se } \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_1 \textit{ e } \mathbf{u} \perp \mathbf{v}_2 & \textit{allora} & \mathbf{u} \perp (\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2), \\ \textit{se } \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{u} \textit{ e } \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{u} & \textit{allora} & (\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) \perp \mathbf{u}, \end{array}$$

*per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.*

Queste proprieta' derivano direttamente dalla definizione di ortogonalita'. Ad esempio, la prima parte della (3) si prova come segue. $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}_2$ significa che $\mathbf{u}^T\mathbf{v}_1 = 0$ e $\mathbf{u}^T\mathbf{v}_2 = 0$, cio' implica che

$$\mathbf{u}^T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1\mathbf{u}^T\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{u}^T\mathbf{v}_2 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0$$

e cio' significa che $\mathbf{u} \perp (\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2)$.

**Complemento ortogonale** Nello spazio Euclideo ordinario, fissato un punto O e considerati i vettori con origine in O, si ha che:

(1.1) un vettore e' ortogonale ad un dato un vettore non nullo **a** se e solo se esso e' ortogonale alla retta generata da **a**;

(1.2) i vettori ortogonali ad una data retta per O sono tutti e soli quelli che stanno sul piano per O ortogonale alla retta;

(2.1) un vettore e' ortogonale a due dati vettori non allineati $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ se e solo se esso e' ortogonale al piano generato da $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$;

(2.2) i vettori ortogonali ad un dato piano per O sono tutti e soli quelli che stanno sulla retta per O ortogonale al piano.

**Esempi** Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo i vettori dello spazio con vettori di $\mathbb{R}^3$.

(1) I vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali al vettore $(2,3,5)$ sono tutte e sole le soluzioni della equazione lineare

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0,$$

cioe' i vettori del tipo $(-\frac{3}{2}p - \frac{5}{2}q, p, q) = p(-\frac{3}{2}, 1, 0) + q(-\frac{5}{2}, 0, 1)$ dove $p, q$ variano in $\mathbb{R}$. Dunque i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali al vettore $(2,3,5)$ sono tutti e soli i vettori del piano generato dai vettori $(-\frac{3}{2}, 1, 0)$ e $(-\frac{5}{2}, 0, 1)$.

(2) I vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali ai vettori $(1,2,0)$ e $(1,0,3)$ sono tutte e sole le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

cioe' i vettori del tipo $(p, -\frac{p}{2}, -\frac{p}{3}) = p(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ dove $p$ varia in $\mathbb{R}$. Dunque i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali ai vettori $(1,2,0)$ e $(1,0,3)$ sono tutti e soli i vettori della retta generata dal vettore $(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.

Questi fatti si estendono ad $\mathbb{R}^n$ nel modo seguente

**Proposizione 2** *Siano $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ vettori di $\mathbb{R}^n$;*
*(1) un vettore di $\mathbb{R}^n$ e' ortogonale a ciascun vettore $\mathbf{a}_i$ se e solo se e' ortogonale a ciascun vettore del sottospazio $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle$;*
*(2) l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a ciascun vettore di un dato sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.*

Questa proposizione segue direttamente dalle proprieta' dell'ortogonalita'.

**Definizione 1** *Il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ formato dei vettori ortogonali a ciascun vettore di un sottospazio $V$ di $\mathbb{R}^n$ si dice complemento ortogonale di $V$ e si indica con $V^\perp$ :*

$$V^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \mathbf{x} \perp \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in V\}.$$

Osserviamo infine che, dati $m$ vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ in $\mathbb{R}^n$, ed indicata con $A = [\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_m]$ la matrice $m \times n$ avente per colonne questi vettori, si ha

(1) il sottospazio generato da $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ e' lo spazio colonna della matrice $A$ :

$$\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle = \mathcal{C}(A);$$

(2) il complemento ortogonale del sottospazio generato da $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ e' lo spazio nullo della matrice $A^T$ :

$$\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle^\perp = \mathcal{N}(A^T).$$

Infatti: un vettore $\mathbf{x}$ e' ortogonale ad ogni vettore del sottospazio $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle$ se e solo se $\mathbf{x}$ e' ortogonale ad ogni vettore $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, cioe'

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{x} = 0 \end{cases} \qquad \text{in altri termini} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{in breve} \quad A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

**Proprieta' della norma**

**Proposizione 3** *La funzione norma su $\mathbb{R}^n$ possiede le seguenti proprieta':*

*(1) la norma di un vettore e' sempre maggiore-uguale a zero e vale zero se e solo se il vettore e' nullo:*

$$\|\mathbf{u}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n; \qquad \|\mathbf{u}\| = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0};$$

*(2) la norma del vettore prodotto di un vettore per uno scalare e' uguale al prodotto della norma del vettore per il valore assoluto dello scalare:*

$$\|r\mathbf{u}\| = |r| \|\mathbf{u}\|, \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \ r \in \mathbb{R};$$

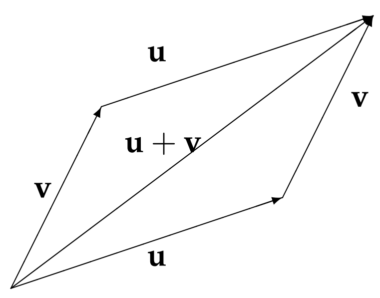
*(3) la norma del vettore somma e' minore o uguale alla somma delle norme dei vettori addendi:*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|;$$

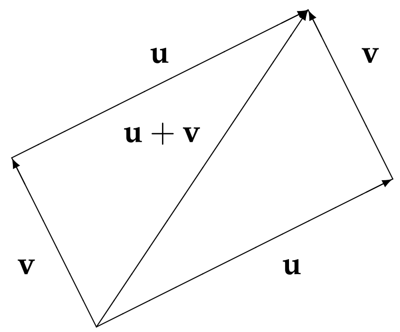
*(4) il quadrato della norma del vettore somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ fra loro ortogonali e' uguale alla somma dei quadrati delle norme dei vettori addendi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ :*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

La (3) viene detta "disuguaglianza triangolare" per il significato che assume nel piano e spazio Euclidei ordinari



La (4) viene detta "Teorema di Pitagora" per il significato che assume nel piano e spazio Euclidei ordinari




Le prime due proprieta' derivano direttamente dalla definizione di norma. Non diamo la dimostrazione della disuguaglianza triangolare. Il teorema di Pitagora si prova nel modo seguente

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})^T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u}^T+\mathbf{v}^T)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}^T\mathbf{u}+\mathbf{u}^T\mathbf{v}+\mathbf{v}^T\mathbf{u}+\mathbf{v}^T\mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2+2\mathbf{u}^T\mathbf{v}+\|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali, si ha $\mathbf{u}^T\mathbf{v}=0$, e

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2.$$

**Connessione coi primi concetti di Statistica.** Abbiamo provato che dato in $\mathbb{R}^n$ un vettore non nullo $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, ogni vettore $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{q}, \quad \mathbf{p}\in\langle\mathbf{a}\rangle,\ \mathbf{q}\in\langle\mathbf{a}\rangle^{\perp},$$

abbiamo definito $\mathbf{p}=\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{b}$ su $\mathbf{a}$, abbiamo provato che

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\,\mathbf{a},$$

ed abbiamo definito

$$\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

il coefficiente di Fourier di $\mathbf{b}$ rispetto ad $\mathbf{a}$. Risulta utile dire anche che $\mathbf{p}$ e' la componente di $\mathbf{b}$ parallela ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{q}$ e' la componente di $\mathbf{b}$ ortogonale ad $\mathbf{a}$. Osserviamo infine che per il teorema di Pitagora si ha

$$\|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2+\|\mathbf{q}\|^2.$$

Nel caso particolare in cui $\mathbf{a} = (1, 1, \ldots, 1)$ e' il vettore con tutte le componenti uguali a uno, si ha che

(1) ogni vettore $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, dove: $\mathbf{p}$ e' un multiplo scalare di $(1, 1, \ldots, 1)$ cioe' un vettore con tutte le componenti uguali; $\mathbf{q}$ e' un vettore ortogonale ad $(1, 1, \ldots, 1)$, cioe' un vettore con somma delle componenti nulla;

(2) il coefficiente di Fourier di $\mathbf{b}$ rispetto a $\mathbf{a}$ e'

$$\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n},$$

la media aritmetica $\mu_\mathbf{b}$ delle componenti di $\mathbf{b}$;

(3) la componente di $\mathbf{b}$ parallela ad $\mathbf{a}$ e'

$$\mathbf{p} = \mu_\mathbf{b}\, \mathbf{a} = (\mu_\mathbf{b}, \mu_\mathbf{b}, \ldots, \mu_\mathbf{b}),$$

il vettore con tutte le componenti uguali a $\mu_\mathbf{b}$.

(4) la componente di $\mathbf{b}$ ortogonale ad $\mathbf{a}$ e'

$$\mathbf{q} = \mathbf{b} - \mathbf{p} = (b_1 - \mu_\mathbf{b}, b_2 - \mu_\mathbf{b}, \ldots, b_n - \mu_\mathbf{b}).$$

(5) per il teorema di Pitagora si ha la relazione

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 = n\mu_\mathbf{b}^2 + \sum_{i=1}^n (b_i - \mu_\mathbf{b})^2,$$

che puo' essere riscritta

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i^2 = \mu_\mathbf{b}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (b_i - \mu_\mathbf{b})^2,$$

dove al secondo membro il secondo addendo e' la varianza del vettore $\mathbf{b}$.