Spazio vettoriale Euclideo

Proiezioni ortogonali su sottospazi. Approfondendo un poco, la proposizione sulla proiezione ortogonale di un vettore su un vettore non nullo si puo' esprimere anche nella forma

Proposizione 1 *Sia L un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, con $\dim(L) = 1$. Allora ogni vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come*

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \quad \textit{con} \quad \mathbf{p} \in L,\ \mathbf{q} \in L^{\perp};$$

il vettore $\mathbf{p}$ si dice proiezione ortogonale di $\mathbf{b}$ su L e si pone $\mathrm{pr}_L(\mathbf{b}) = \mathbf{p}$. Per ogni $\mathbf{a} \in L$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, si ha

$$\mathrm{pr}_L(\mathbf{b}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\,\mathbf{a}.$$

Questa proposizione si estende al caso di un sottospazio qualsiasi nel modo seguente

Teorema 1 *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come*

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \quad \textit{con} \quad \mathbf{p} \in V,\ \mathbf{q} \in V^{\perp};$$

il vettore $\mathbf{p}$ si dice proiezione ortogonale di $\mathbf{b}$ su V e si pone $\mathrm{pr}_V(\mathbf{b}) = \mathbf{p}$.

Come conseguenza di questo Teorema si ha il

Teorema 2 *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Ogni base ortogonale di V si puo' estendere ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$ aggiungendole una qualsiasi base ortogonale di $V^{\perp}$. In particolare*

$$\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = n$$

Ci sono due modi di costruire le proiezioni ortogonali

Proposizione 2 *Sotto le stesse ipotesi del teorema, per ogni base ortogonale $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ di V, si ha*

$$\mathrm{pr}_V(\mathbf{b}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}_1}(\mathbf{b}) + \cdots + \mathrm{pr}_{\mathbf{a}_m}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}_1^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{a}_m^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}_m^T\mathbf{a}_m}\mathbf{a}_m.$$

Proposizione 3 *Sotto le stesse ipotesi del teorema, per ogni base $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ di V, posto $A = [\mathbf{a}_1\ \ldots\ \mathbf{a}_m]$ si ha*

$$\mathrm{pr}_V(\mathbf{b}) = A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}.$$

Non diamo la dimostrazione ne' del Teorema ne' delle Proposizioni.

Esempi In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il sottospazio $V = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ generato dai vettori $\mathbf{a}_1 = (1,0,1)$ e $\mathbf{a}_2 = (0,1,2)$, e il vettore $\mathbf{b} = (3,5,7)$. La proiezione ortogonale di $\mathbf{b}$ su V puo' essere determinata nei due modi seguenti.

(1) A partire dalla base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ di V costruiamo una base ortogonale $\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*$ di V, dove $\mathbf{a}_1^* = (1,0,1)$ e

$$\mathbf{a}_2^* = (0,1,2) - \mathrm{pr}_{(1,0,1)}((0,1,2)) = (0,1,2) - \frac{2}{2}(1,0,1) = (-1,1,1).$$

Per la Proposizione 2, la proiezione ortogonale di $\mathbf{b}$ su V e' data da

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_V(\mathbf{b}) &= \mathrm{pr}_{\mathbf{a}_1^*}(\mathbf{b}) + \mathrm{pr}_{\mathbf{a}_2^*}(\mathbf{b}) \\ &= \mathrm{pr}_{(1,0,1)}((3,5,7)) + \mathrm{pr}_{(-1,1,1)}((3,5,7)) \\ &= \frac{10}{2}(1,0,1) + \frac{9}{3}(-1,1,1) = (2,3,8).\end{aligned}$$

Si puo' verificare la correttezza del risultato trovato $\mathrm{pr}_V(\mathbf{b}) = (2,3,8)$ verificando che $(2,3,8) \in V$ e che $\mathbf{b} - (2,3,8) \in V^\perp$.

(1') A partire dalla base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ consideriamo la matrice

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per la Proposizione 3 la proiezione ortogonale di $\mathbf{b}$ su V e' data da

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_V(\mathbf{b}) &= A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Funzioni proiezione ortogonale

Definizione 1 *Dato un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$, associando a ciascun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la sua proiezione ortogonale $\mathrm{pr}_V(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ si ottiene una funzione $\mathrm{pr}_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, detta funzione proiezione ortogonale su V.*

Dal Teorema 1 segue la

Proposizione 4 *Ciascuna funzione proiezione ortogonale* $\mathrm{pr}_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *su un sottospazio* V *di uno spazio* $\mathbb{R}^n$ *e' lineare. La matrice* M *quadrata di ordine* n *tale che* $\mathrm{pr}_V(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *si dice matrice di proiezione ortogonale su* V.

Dalla proposizione 3 segue la

Proposizione 5 *Sia* V *un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *sia* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *una base di* V, *ed* $A = [\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_m]$. *Allora la matrice di proiezione ortogonale su* V *e' data da*

$$M = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Esempi

(1') Sia $V = \langle \mathbf{a} \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$. Per la Proposizione 5, la funzione $\mathrm{pr}_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proiezione ortogonale su V e' data da

$$\mathrm{pr}_V(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove

$$\begin{aligned} M = \mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a})^{-1}\mathbf{a}^T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2') Sia $V = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2)$, e sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per la Proposizione 5, la funzione $\mathrm{pr}_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proiezione ortogonale su V e' data da

$$\mathrm{pr}_V(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove

$$\begin{aligned} M = A(A^T A)^{-1} A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Proprieta'

Proposizione 6 *Sia M la matrice di proiezione ortogonale su un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora:*
$M^2 = M$, cioe' M e' idempotente;
$M^T = M$, cioe' M e' simmetrica.

Verifichiamo la prima affermazione. Per la proposizione 5 possiamo scrivere $M = A(A^TA)^{-1}A^T$; dunque

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(A(A^TA)^{-1}A^T\right)\left(A(A^TA)^{-1}A^T\right) \\ &= A(A^TA)^{-1}(A^TA)(A^TA)^{-1}A^T \\ &= A(A^TA)^{-1}A^T = M. \end{aligned}$$

Autovettori e autovalori Nello spazio Euclideo ordinario, consideriamo i vettori con origine in un fissato punto O, un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, ed usiamo questo sistema di riferimento per identificare i vettori dello spazio con vettori in $\mathbb{R}^3$. Data una retta L per O e il piano $L^\perp$ per O ortogonale ad L, consideriamo la funzione proiezione ortogonale su L ed indichiamo con M la matrice di proiezione ortogonale su L :

$$\mathrm{pr}_L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{pr}_L : \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}.$$

Osserviamo che

(1) $\mathbf{x} \in L$ se e solo se $M\mathbf{x} = \mathbf{x}$, cioe' se e solo se $\mathbf{x}$ e' un autovettore di M associato all'autovalore 1;

(2) $\mathbf{x} \in L^\perp$ se e solo se $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cioe' se e solo se $\mathbf{x}$ e' un autovettore di M associato all'autovalore 0;

(3) un qualsiasi vettore di norma 1 su L e due qualsiasi vettori che siano una base ortonormale di $L^\perp$ danno una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di M.

Questi fatti si estendono alle funzioni e relative matrici di proiezione ortogonale su sottospazi nel modo seguente

Proposizione 7 *Sia V un sottospazio di dimensione m di $\mathbb{R}^n$. La matrice M di proiezione ortogonale su V ha le seguenti proprieta':*

(1) V e' un autospazio di M, l'autospazio V_1 associato all'autovalore 1, e $V^\perp$ e' un autospazio di M, l'autospazio V_0 associato all'autovalore 0;

(2) M possiede una base ortonormale di autovettori;

(3) M e' simile ad una matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

avente elementi diagonali 1, ripetuto m volte, e 0, ripetuto $n - m$ volte.

Proviamo solo una parte della (1). Per la Proposizione 5, possiamo scrivere $M = A(A^T A)^{-1} A^T$, dove A e' la matrice di tipo $n \cdot m$ avente per colonne i vettori di una base di V.
Se $\mathbf{x} \in V$, allora si puo' scrivere $\mathbf{x} = A\mathbf{r}$ per un opportuno $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ e

$$\begin{aligned} M\mathbf{x} &= \left(A(A^T A)^{-1} A^T \right) A\mathbf{r} \\ &= A(A^T A)^{-1} (A^T A)\mathbf{r} \\ &= A\mathbf{r} = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Se $\mathbf{x} \in V^{\perp}$, allora $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e e

$$\begin{aligned} M\mathbf{x} &= \left(A(A^T A)^{-1} A^T \right) \mathbf{x} \\ &= A(A^T A)^{-1} (A^T\mathbf{x}) \\ &= A\mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$