V settimana, es. 1 variazione 1

Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si dica se e' linearmente indipendente

$$\begin{aligned} A &= \{(1,2,3),\ (2,3,4)\} \\ B &= \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,1)\} \\ C &= \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,2)\} \\ D &= \{(1,2,4),\ (2,4,7),\ (3,6,10),\ (4,8,13)\}. \end{aligned}$$

Traccia di svolgimento

• Considero l'insieme $A = \{(1,2,3),\ (2,3,4)\}$. I due vettori di A non sono fra loro proporzionali, dunque A e' linearmente indipendente.

• Considero l'insieme $B = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,1)\}$.

(I modo) Osservo che il terzo vettore di B si puo' ottenere come combinazione lineare dei primi due,

$$(2,3,1) = 2(1,1,0) + 1(0,1,1),$$

dunque B e' linearmente dipendente.

(II modo) Cerco i modi di ottenere il vettore nullo come combinazione lineare dei vettori di B, cioe' considero l'equazione

$$x_1(1,1,0) + x_2(0,1,1) + x_3(2,3,1) = (0,0,0)$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3. Questa equazione e' equivalente al sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ci sono infinite soluzioni (lo si verifichi), in particolare c'e' qualche soluzione non banale. Il vettore nullo si puo' ottenere come combinazione lineare non banale dei vettori di B, dunque B e' linearmente dipendente.

• Considero l'insieme $C = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,2)\}$.

Cerco i modi di ottenere il vettore nullo come combinazione lineare dei vettori di C, cioe' considero l'equazione

$$x_1(1,1,0) + x_2(0,1,1) + x_3(2,3,2) = (0,0,0)$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3. Questa equazione e' equivalente al sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

C'e' una sola soluzione (lo si verifichi), quella banale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Il vettore nullo si puo' ottenere solo come combinazione lineare banale dei vettori di B, dunque B e' linearmente indipendente.

• Considero l'insieme $D = \{(1,2,4),\ (2,4,7),\ (3,6,10),\ (4,8,13)\}$. Questo insieme e' formato da 4 vettori di $\mathbb{R}^3$; un qualsiasi insieme formato da piu' di 3 vettori di $\mathbb{R}^3$ e' linearmente dipendente; dunque D e' linearmente dipendente.

V settimana, es. 1 variazione 2
Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si dica se e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} A &= \{(1,2,3),\ (2,3,4)\} \\ B &= \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,1)\} \\ C &= \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,2)\} \\ D &= \{(1,2,4),\ (2,4,7),\ (3,6,10),\ (4,8,13)\}. \end{aligned}$$

Traccia di svolgimento Diamo una risoluzione diretta di questo esercizio, senza usare la risoluzione dell'esercizio precedente.

• Considero l'insieme $A = \{(1,2,3),\ (2,3,4)\}$. Questo insieme e' formato da 2 vettori di $\mathbb{R}^3$; nessun insieme formato da meno di 3 vettori di $\mathbb{R}^3$ e' sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$; dunque A non e' sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

• Considero l'insieme $B = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,1)\}$.

(I modo) Osservo che il terzo vettore di B si puo' ottenere come combinazione lineare dei primi due,

$$(2,3,1) = 2(1,1,0) + 1(0,1,1).$$

L'insieme $B = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,1)\}$ e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$ se e solo se l'insieme $B' = \{(1,1,0),\ (0,1,1)\}$ e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$. Questo insieme e' formato da 2 vettori di $\mathbb{R}^3$, ... dunque B' non e' sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$ e con esso B non e' sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

(II modo) Verifico se ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si puo' ottenere come combinazione lineare dei vettori di B. Per ogni $p,q,r \in \mathbb{R}$ considero l'equazione

$$x_1(1,1,0) + x_2(0,1,1) + x_3(2,3,1) = (p,q,r)$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3. Questa equazione e' equivalente al sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = p \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = q \\ x_2 + x_3 = r \end{cases},$$

che a sua volta e' equivalente al sistema (lo si verifichi)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = p \\ x_2 + x_3 = q - p \\ 0 = r - q + p \end{cases}$$

Questo sistema per $r - q + p \neq 0$ non ha soluzioni. Esistono dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che non si possono ottenere come combinazione lineare dei vettori di B, e B non e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

• Considero l'insieme $C = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,3,2)\}$.

Verifico se ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si puo' ottenere come combinazione lineare dei vettori di C. Per ogni $p, q, r \in \mathbb{R}$ considero l'equazione

$$x_1(1,1,0) + x_2(0,1,1) + x_3(2,3,2) = (p,q,r)$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3. Questa equazione e' equivalente al sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = p \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = q \\ x_2 + 2x_3 = r \end{cases},$$

che a sua volta e' equivalente al sistema (lo si verifichi)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = p \\ x_2 + x_3 = q - p \\ x_3 = r - q + p \end{cases}$$

Per ogni $p, q, r \in R$ questo sistema ha soluzioni. Ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si puo' ottenere come combinazione lineare dei vettori di C, e C e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

• Considero l'insieme $D = \{(1,2,4),\ (2,4,7),\ (3,6,10),\ (4,8,13)\}$.

Verifico se ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si puo' ottenere come combinazione lineare dei vettori di D. Per ogni $p, q, r \in \mathbb{R}$ considero l'equazione

$$x_1(1,2,4) + x_2(2,4,7) + x_3(3,6,10) + x_3(4,8,13) = (p,q,r)$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4. Questa equazione e' equivalente al sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = p \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = q \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 13x_4 = r \end{cases}.$$

che e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = p \\ 0 = q - 2p \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 = r - 4p \end{cases}.$$

Questo sistema per $q - 2p \neq 0$ non ha soluzini. Esistono dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che non si possono ottenere come combinazione lineare dei vettori di D, e D non e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.