



Figure 1: xe^x

Esercizio 3 Settimana VIII

È data la funzione

$$f(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Determinare:

1. gli eventuali limiti di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$;
2. gli intervalli in cui f è crescente/ decrescente;
3. gli eventuali punti di massimo/ minimo locale e globale di f ;
4. gli intervalli in cui f è curva verso l'alto/ il basso e gli eventuali punti di flesso per f .

Svolgimento _____

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.
 Per $x \rightarrow -\infty$ xe^x presenta la forma di indecisione $(-\infty) \cdot 0^+$; si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = -0^+ = 0^-.$$

(per i teoremi di confronto fra potenze ed esponenziale)

2. La funzione f , essendo prodotto delle funzioni e^x , x , che sono derivabili un numero qualsiasi di volte sull'intervallo $] -\infty, +\infty[$, è anch'essa derivabile un numero qualsiasi di volte su tale intervallo. Si ha

$$Df(x) = D(xe^x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

$$Df(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1+x)e^x \geq 0 \Leftrightarrow 1+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Il segno della derivata di f , e la crescita, decrescenza di f sono riportate nella seguente tabella

x		-1	
<i>segno di $f'(x)$</i>	-	0	+
<i>$f(x)$</i>	↘		↗

Dunque la funzione f

- è decrescente su $] -\infty, -1]$
- ha un punto di minimo locale in -1
- è crescente su $[-1, +\infty[$.

3. Il punto $x = -1$ è un punto di minimo globale per f ; il corrispondente minimo globale di f è $f(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e}$.
 f non ha punti di massimo globale [perché?].

4. La funzione f è derivabile due volte sul suo dominio naturale, e si ha

$$D^2f(x) = D(e^x + xe^x) = (e^x + e^x + xe^x) = (x+2)e^x.$$

$$D^2f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Il segno della derivata seconda di f e la curvatura verso alto/basso sono riportati nella seguente tabella:

x		-2	
<i>segno di $f''(x)$</i>	-	0	+
<i>curvatura di $f(x)$</i>	∩		∪

Dunque la funzione f

- è curva verso il basso su $] -\infty, -2]$
- ha un punto di flesso in -2
- è curva verso l'alto su $[-2, +\infty[$.

Esercizio 2(3) IV Settimana

Si determini, se esiste, il limite per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$ della funzione:

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + x}.$$

Svolgimento

La funzione $f(x)$ è definita per $x > 0$, quindi per $x \rightarrow -\infty$ non ha senso il limite.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + x} = \frac{(+\infty) + (+\infty)}{2 \cdot (+\infty) + (+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{forma di indecisione}$$

Mettiamo in evidenza i termini che tendono più velocemente all'infinito, cioè quelli di grado maggiore

$$\frac{x + \sqrt{x}}{2\sqrt{x} + x} = \frac{x(1 + \frac{\sqrt{x}}{x})}{x(2\frac{\sqrt{x}}{x} + x)} = \frac{x}{x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}} + 1} \rightarrow 1 \cdot \frac{1 + 0}{0 + 1} = 1$$

Esercizio 3(3) X Settimana

Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$$

Svolgimento

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx &= \lim_{a \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} \int_a^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx = \lim_{a \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} \frac{1}{2} \cdot \int_a^{\frac{1}{2}} 2(2x+3)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} \frac{1}{2} \left[\frac{(2x+3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_a^{\frac{1}{2}} = \lim_{a \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} [\sqrt{2x+3}]_a^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{a \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} (\sqrt{4} - \sqrt{2a+3}) = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$