

## 00674 Matematica, F.A.I.; a.a. 2015-2016; programma svolto

**Nozioni generali** Prime nozioni e notazioni insiemistiche. Prodotto cartesiano, relazioni. Funzioni; grafico di una funzione. Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva; funzione inversa. Composizione di funzioni; funzioni identita'; caratterizzazione della funzione inversa.

**Numeri reali** Numeri razionali, operazioni, ordinamento, proprieta'; potenza ad esponente intero relativo, proprieta'. Non risolubilita' dell'equazione  $x^2 = 2$ ; rappresentazione decimale, periodicita'. Numeri reali dati mediante rappresentazioni decimali, operazioni, ordinamento, proprieta'. Valore assoluto, proprieta'. Sistemi di riferimento su una retta e identificazione di  $\mathbb{R}$  con l'insieme dei punti di una retta. Intervalli. Polinomi a coefficienti reali; potenze del binomio; radici; teorema di Ruffini; coefficienti e radici. Radici di un numero reale. Potenza ad esponente razionale; potenza ad esponente reale; proprieta'. Logaritmi, proprieta'. Equazioni e disequazioni.

**Funzioni reali di una variabile reale** Sistemi di riferimento nel piano e identificazione di  $\mathbb{R}^2$  con l'insieme dei punti del piano. Pendenza di una retta rispetto ad un sistema di riferimento; equazioni della retta. Funzioni reali di variabile reale, grafico. Relazione fra i grafici di funzioni fra loro inverse. Funzioni monotone crescenti o decrescenti; punti di minimo, massimo eventualmente stretti globali, locali. Funzioni polinomiali di grado al piu' uno e rette nel piano; funzioni polinomiali di II grado e parabole. Funzioni potenza ad esponente naturale, e loro inverse funzioni radice; funzioni potenza ad esponente intero relativo; funzioni potenza ad esponente razionale; funzioni potenza ad esponente reale. Funzioni pari e dispari. Funzioni esponenziali e loro inverse funzioni logaritmo. Funzioni coseno, seno, tangente e loro inverse. Funzioni periodiche. Funzione valore assoluto. Funzione parte intera.

**Limiti, continuita'** Intorni e semiintorni di un punto. Limite  $-\infty, l^-, l, l^+, +\infty$ , di una funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $-\infty, c^-, c, c^+, +\infty$ ; relazioni fra i vari limiti. Limiti per le funzioni potenza, esponenziale, logaritmo e trigonometriche. Limiti e operazioni aritmetiche. Numeri reali estesi, operazioni aritmetiche parziali, ordinamento. Teoremi dei carabinieri. Confronto fra esponenziali, potenze, logaritmi. Limiti notevoli. Limiti e composizione di funzioni, cambiamento di variabili. Continuita' di una funzione in un punto e su un insieme. Continuita', operazioni aritmetiche, e composizione di funzioni. Teorema dei valori intermedi, teorema degli zeri. Funzioni continue, iniettivita' e monotonia. Teorema di Weierstrass.

**Derivate** Rapporto incrementale. Derivata di una funzione in un punto. Interpretazione cinematica; interpretazione geometrica. Derivabilita' e continuita'. Derivata sinistra, destra, bilatera. Funzione derivata di una funzione, notazioni. Derivate

delle funzioni potenza, esponenziale, logaritmo e trigonometriche. Derivazione e operazioni aritmetiche sulle funzioni. Derivazione e composizione di funzioni. Derivazione delle funzioni inverse.

Punti di massimo o minimo locale e annullamento della derivata (teorema di Fermat). Teorema del valor medio di Lagrange. Intervalli di monotonia e segno della derivata.

Derivate di ordine superiore. Derivate di ordine superiore delle funzioni potenza, esponenziale, logaritmo e trigonometriche. Coefficienti di un polinomio e derivate in un punto. Approssimazione di una funzione mediante polinomi di Taylor. Criterio del secondo ordine per punti di massimo e minimo locali; criterio generale.

Monotonia della derivata e relazione grafico-tangenti. Curvatura verso l'alto, il basso; punti di flesso. Punti di flesso e annullamento derivata seconda. Curvatura verso l'alto, il basso e segno della derivata seconda.

**Integrali** Successioni. Somme di Cauchy-Riemann; successioni ammissibili di somme di Cauchy-Riemann. Definizione di integrale di Riemann di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato. Area di un trapezoide. Proprietà dell'integrale. Teorema della media integrale. Funzione integrale. I teorema fondamentale del calcolo. Primitive di una funzione, relativo teorema. Il teorema fondamentale del calcolo. Integrale indefinito. Integrale indefinito e operazioni lineari e di composizione di funzioni. Integrazione per parti. Sostituzione di variabili. Integrali generalizzati.

**Sistemi lineari** Sistemi di riferimento e coordinate nel piano; sistemi di equazioni lineari in due incognite e intersezione di rette nel piano. Sistemi di riferimento e coordinate nello spazio; sistemi di equazioni lineari in tre incognite e intersezione di piani nello spazio. Sistemi lineari di  $m$  equazioni in  $n$  incognite; sistemi lineari impossibili, determinati, indeterminati. Metodo di eliminazione per la risoluzione di un sistema. Matrice di un sistema. Versione matriciale del metodo di eliminazione. Sistemi lineari con meno equazioni che incognite. Sistemi lineari omogenei; soluzione banale. Sistemi lineari omogenei con meno equazioni che incognite.

**Spazi vettoriali** Piano vettoriale geometrico  $\mathcal{G}^2$ , spazio vettoriale geometrico  $\mathcal{G}^3$ , spazio vettoriale  $n$ -dimensionale standard  $\mathbb{R}^n$ . Identificazione di  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathcal{G}^2$  e di  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathcal{G}^3$ . Spazi vettoriali. Combinazioni lineari. Relazione fra combinazioni lineari e sistemi lineari. Indipendenza lineare. Il caso di uno o due vettori; vettori canonici di  $\mathbb{R}^n$ . Teorema di caratterizzazione della indipendenza lineare. Proposizione sulle sequenze di  $m > n$  vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Sistema di generatori di uno spazio vettoriale. Proposizione sulle sequenze di  $m < n$  vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Base di uno spazio vettoriale. Proposizione: ciascuna base di  $\mathbb{R}^n$  ha  $n$  vettori. Spazio generato da un numero finito di vettori. Basi, coordinate e identificazione di uno spazio vettoriale con uno spazio

vettoriale standard. Proposizione e definizione di dimensione di uno spazio vettoriale. Proposizione sulla dimensione di uno spazio generato da  $m$  vettori. Spazio riga e spazio colonna di una matrice. Teorema e definizione di rango di una matrice. Caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo.

**Determinanti** Determinante di una matrice quadrata di ordine  $n$ ; definizione diretta nel caso  $n = 1, 2, 3$ , definizione in generale mediante sviluppo rispetto alla prima colonna. Significato geometrico per  $n = 2, 3$ . Osservazione sul determinante di una matrice triangolare. Invarianza per trasposizione. Proprietà rispetto alle colonne, e alle righe. Teorema di caratterizzazione delle matrici quadrate di ordine  $n$  aventi rango  $n$ . Teorema e regola di Cramer.

**Algebra delle matrici** Vettori riga, vettori colonna. Prodotto di una riga per una colonna. Rappresentazione  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  di equazioni lineari. Matrici; tipo, notazioni. Prodotto di due matrici. Rappresentazione  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  di sistemi lineari. Matrici unita'; associatività; non commutatività. Teorema di Binet. Prodotto di una matrice per uno scalare. Matrice inversa, definizione, unicità; proprietà dell'inversione. Potenze di una matrice ad esponente intero relativo. Invertibilità e matrice inversa di una matrice ordine due. Teoremi su invertibilità, matrice inversa e sistemi lineari. Metodo di Gauss-Jordan per l'inversione di una matrice. Somma di matrici. Proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma di matrici. Prodotti matrice per colonna e combinazioni lineari. Rappresentazione sintetica dello spazio colonna di una matrice. Spazio nullo di una matrice. Matrice trasposta di una matrice. Proprietà della trasposizione. Teorema e definizione di matrice non singolare.

**Spazi vettoriali Euclidei.** Prodotto scalare standard di due vettori in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , formule per la lunghezza e per la relazione di ortogonalità di vettori nel piano e nello spazio. Prodotto scalare standard di due vettori in  $\mathbb{R}^n$ , definizione della norma e della relazione di ortogonalità. Proiezione ortogonale di un vettore su un vettore, coefficienti di Fourier. Proprietà della relazione di ortogonalità in  $\mathbb{R}^n$ . Complemento ortogonale di un sottospazio. Rappresentazione di un sottospazio come spazio colonna di una matrice e del suo complemento ortogonale come spazio nullo della matrice trasposta. Proprietà della norma; disuguaglianza triangolare, teorema di Pitagora. Ortogonalità e indipendenza lineare. Basi ortogonali e ortonormali di  $\mathbb{R}^n$ , e relative coordinate. Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Matrici ortogonali.

**Autovettori e autovalori.** Funzioni lineari da  $\mathbb{R}^n$  ad  $\mathbb{R}^m$  e matrici di tipo  $m \cdot n$ . Autovettori e autovalori di una matrice quadrata. Teorema e definizione di polinomio caratteristico di una matrice. Autospazi di una matrice. Matrici semisemplici. Lineare indipendenza di autovettori associati ad autovalori distinti. Matrici quadrate di ordine  $n$  con  $n$  autovalori distinti. Per matrici reali simmetriche, ortogonalità di

autovettori associati ad autovalori distinti. Teorema spettrale. Matrici diagonalizzabili. Equivalenza fra semisemplicità e diagonalizzabilità.

**Proiezioni ortogonali su sottospazi.** Teorema (esistenza e unicità scomposizione). Teorema (dimensioni). Proposizione (I formula). Proposizione (II formula). Funzioni di proiezione ortogonale, linearità, matrici di proiezione ortogonale. Proprietà, idempotenza, simmetria. Autovettori e autovalori; basi ortonormali di autovettori, matrice diagonale associata.