Matematica per Finanza, assicurazioni e impresa; aa 2015-2016; argomenti svolti:

I settimana;

21.09 Presentazione del corso. In particolare:
-Analisi (funzioni reali di una variabile reale, calcolo differenziale, calcolo integrale);
-Algebra lineare (sistemi di equazioni lineari, spazi vettoriali, algebra delle matrici).

[Analisi]. Linguaggio degli insiemi: appartenenza, quantificatori, implicazioni, inclusione, insieme delle parti, unione, intersezione, prodotto cartesiano; per insiemi finiti, cardinalita', cardinalita' dell'insieme delle parti, cardinalita' e unione e intersezione, cardinalita' e prodotto cartesiano.
Primi insiemi numerici: numeri naturali $\mathbb{N}$, interi relativi $\mathbb{Z}$, razionali $\mathbb{Q}$. In $\mathbb{Q}$: somma, prodotto, ordinamento e loro proprieta'; nozione di campo ordinato; potenze ad esponente intero relativo, proprieta'. L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$, dimostrazione. Sistema di riferimento sulla retta, identificazione dei numeri razionali come certi punti, esistenza di altri punti. Rappresentazione decimale di numeri razionali: finitezza del numero di cifre dopo la virgola o periodicita'. Definizione di numero reale come allineamento decimale arbitrario; insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Esempio di un allineamento decimale non periodico (dunque non corrispondente ad alcun numero razionale).

22.09 [Algebra lineare]. Sistema di riferimento sulla retta, corrispondenza biunivoca fra insieme $\mathbb{R}$ e insieme dei punti della retta. Segmento orientato, sua misura con segno (rispetto a un riferimento sulla retta).
Sistema di riferimento nel piano, corrispondenza biunivoca fra insieme $\mathbb{R}^2$ e insieme dei punti del piano. Pendenza di un segmento rispetto ad un sistema di riferimento; equazione della retta per due punti; equazione canonica della retta; equazione generale della retta.
Equazioni lineari in una incognita su $\mathbb{R}$. Equazioni lineari in due incognite su $\mathbb{R}$ e rette nel piano. Sistemi di due equazioni lineari in due incognite e intersezione di rette nel piano; condizioni di coincidenza, parallelismo, incidenza; metodo di eliminazione (correttezza del metodo).
Equazioni lineari in n incognite su $\mathbb{R}$; soluzioni come elementi di $\mathbb{R}^n$; risoluzione, discussione. Sistemi di m equazioni lineari in n incognite su $\mathbb{R}$, notazioni; sistema determinato, impossibile, indeterminato.

23.09 [Analisi]. Numero e di Nepero e pi greco π (cenno). Osservazione sugli allineamenti decimali con periodo 9. Operazioni di somma e prodotto su $\mathbb{R}$, loro proprieta', proprieta' distributiva (si afferma che si possono definire le operazioni in modo che valgano le proprieta').
Polinomi in una incognita su $\mathbb{R}$; valutazione di un polinomio in un numero reale, principio di identita', grado di un polinomio. Potenza $n-$ma del binomio $(x + 1)^n$, definizione di coefficiente binomiale $\binom{n}{i}$ come coefficiente di x^i, cioe' tramite

l'uguaglinza

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i;$$

matrice dei coefficienti binomiali (triangolo di Tartaglia, Pascal, ...); relazione ricorsiva $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$, dimostrazione a partire dall'identita' $(x+1)^{n+1} = (x+1)^n(x+1)$.
Identita' notevole

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) = \sum_{k=0}^{n} e_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)x^{n-k}$$

dove $e_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ e' la funzione elementare $k-$ma in $a_1,a_2,\ldots,a_n$:

$$e_k(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}.$$

Ordinamento su $\mathbb{R}$, definizione, proprieta', proprieta' rispetto alle operazioni.
Polinomi in una incognita su $\mathbb{R}$; radici di un polinomio; teorema di Ruffini; conseguenza: un polinomio di grado n su $\mathbb{R}$ ha al piu' n radici in $\mathbb{R}$.
Segno del trinomio di II grado.

[Algebra lineare]. Sistemi di equazioni lineari in tre incognite su $\mathbb{R}$; risoluzione col metodo di eliminazione di un sistema di tre equazioni, e di un sistema di due equazioni; risoluzione di una equazione.
Sistema di riferimento nello spazio, corrispondenza biunivoca fra insieme $\mathbb{R}^3$ e insieme dei punti dello spazio. Equazione lineari in tre incognite su $\mathbb{R}$ e piani nello spazio. Sistemi di due equazioni lineari in tre incognite e intersezione di piani nello spazio; condizioni di coincidenza, parallelismo, incidenza in una retta. Sistemi di tre equazioni lineari in tre incognite impossibili o indeterminati.
Sistema triangolare di m equazioni in n incognite, casi $m = n$, $m < n$ e $m > n$, discussione e risoluzione. Sistema a scala di m equazioni in n incognite, discussione e risoluzione.

II settimana;

28.09 [Analisi]. Relazioni; funzioni; grafico; funzioni iniettive, suriettive; funzioni biiettive e funzione inversa. Enumerazione delle relazioni, ..., biiezioni fra insiemi finiti; permutazioni e fattoriali. Funzioni reali di variabile reale; grafico. Funzioni monotone crescenti/decrescenti, definizione diretta e caratterizzazione mediante pendenze.

29.09 [Analisi] Funzioni potenza ad esponente intero relativo; loro proprieta' di monotonia. Simmetria rispetto ad una retta, rispetto a un punto. Funzioni pari e dispari. Numeri reali: radici; potenze ad esponente razionale. Restrizioni delle funzioni potenza ad esponente naturale (nonzero) e le loro inverse funzioni radice.

Relazione fra i grafici di due funzioni una inversa dell'altra. Numeri reali: potenze ad esponente irrazionale.

30.09 [Algebra lineare] Processo di eliminazione per la soluzione di un sistema; esempio; rappresentazione con matrici del sistema e del processo di eliminazione. Variabili libere e vincolate. Descrizione del processo in generale. Proposizione: un sistema di m equazioni in n incognite con $m < n$ o e' impossibile o e' indeterminato.

[Analisi] Funzioni esponenziali; proprieta' rispetto alle operazioni; monotonia. Numeri reali: logaritmi. Funzioni logaritmo; proprieta' rispetto alle operazioni; monotonia. Cenno all'uso dei logaritmi per il calcolo (pre-computer). Funzioni trigonometriche seno, coseno, tangente. Periodo di una funzione. Restrizioni delle funzioni seno, coseno, tangente e le loro inverse arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

III settimana;

05.10 [Analisi]. Composizione di funzioni; proprieta'; funzioni identita'; caratterizzazione della funzione inversa. Operazioni arimetiche (somma, sottrazione, prodotto per costanti, prodotto, divisione) sulle funzioni reali di variabile reale. Nozione di funzione elementare. Funzioni polinomiali; funzioni polinomiali di I e II grado e loro grafici. Equazioni e disequazioni algebriche.

06.10 [Algebra lineare] Vettori nel piano; identificazione dell'insieme dei vettori con l'insieme dei segmenti orientati con orignine in un punto fissato. Operazioni di somma di due vettori e di prodotto di un numero reale per un vettore; proprieta'. Caratterizzazione dei vettori che stanno sulla retta di un dato vettore non nullo. Vettori nello spazio. Caratterizzazione dei vettori che stanno sul piano di un due dati vettori non allineati. Ennuple; operazioni di somma di due ennuple e di prodotto di un numero reale per una ennupla; proprieta'. Definizione di spazio vettoriale. Spazi vettoriali geometrici $\mathcal{G}^2$, $\mathcal{G}^3$, spazio vettoriale $n-$dimensionale standard $\mathbb{R}^n$. Identificazione di $\mathcal{G}^2$ con $\mathbb{R}^2$ e di $\mathcal{G}^3$ con $\mathbb{R}^3$. Combinazioni lineari.

07.10 [Analisi] Equazioni e disequazioni in una incognita: esempi (algebriche, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, irrazionali, con valore assoluto), e principi generali di trasformazione (quelli usuali, e ruolo delle funzioni iniettive e monotone) e di risoluzione; uso dei grafici.

[Algebra lineare] Due vettori geometrici "generici". Definizione di sequenza di vettori linearmente indipendente, dipendente. Esempi di due e tre vettori in $\mathbb{R}^3$. In $\mathbb{R}^n$: dipendenza lineare di due vettori non nulli e proporzionalita'; vettori canonici $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$. Traduzione di una equazione

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \underline{a}_j = \underline{b}$$

nelle m incognite x_j ($j = 1, \ldots, m$) con $\underline{a}_j$ ($j = 1, \ldots, m$) e $\underline{b}$ in $\mathbb{R}^n$ in un sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

di n equazioni nelle m incognite x_j ($j = 1, \ldots, m$), e viceversa. Sistema lineare omogeneo; soluzione banale. Proposizione: un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite con $m < n$ ha sempre almeno una soluzione non banale. Teorema di caratterizzazione dell'indipendenza lineare. Proposizione: in $\mathbb{R}^n$ ogni sequenza di $m > n$ vettori e' linearmente dipendente.

IV settimana;

[Analisi]. Sulla retta reale: distanza fra due punti come valore assoluto della differenza; disuguaglianza triangolare. Intorno di un dato punto con un dato raggio; per due punti distinti, esistenza di due intorni disgiunti. Interpretazione di una funzione reale di variabile reale come legge oraria del moto di un punto materiale sulla retta. Problema: studio dell'andamento di una funzione per valori arbitrariamente grandi; discussione di alcuni casi. Definizione di limite (finito, $+\infty$, $-\infty$) di una funzione $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$. Interpretazione cinematica e interpretazione grafica della definizione. Ripresa dei casi iniziali.

[Analisi]. Semiintorni di un dato punto con un dato raggio. Definizione di limite l^- ed l^+ (l numero reale) di una funzione $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$. Limiti per $x \to +\infty$ delle funzioni elementari: potenze x^α ($\alpha \in R$), esponenziali $\exp_b(x)$ ($0 < b$), logaritmi $\log_b(x)$ ($0 < b \neq 1$), funzioni polinomiali di I e II grado. Regola del cambiamento di base per logaritmi. Variante (”$f(x)$ tende a ... per ...” al posto di ”il limite di $f(x)$ per ... e' ... ”). Teorema dei due carabinieri; analoghi con uno solo. Esempi. Limiti per $x \to +\infty$ e operazioni aritmetiche. Somma: tabellina del limite della funzione somma di due funzioni con dati limiti (distinzione dei casi $-\infty$, finito, $+\infty$); forma di indecisione $+\infty + (-\infty)$, esempi. Prodotto: tabellina del limite della funzione prodotto di due funzioni con dati limiti (distinzione dei casi $0^\pm$, finito $\neq 0$, e $\pm\infty$; forma di indecisione $0 \cdot \infty$, esempi. Limiti per $x \to +\infty$ di funzioni polinomiali.

[Analisi]. Funzione parte intera $[x]$; funzione $1/[x]$. Limiti per $x \to +\infty$ e operazioni aritmetiche (continuazione). Reciproco: limite della funzione reciproca $1/f(x)$ di una funzione $f(x)$ con dato limite (distinzione dei casi di dato limite $0^\pm$, finito $\neq 0$, e $\pm\infty$; possibile non esistenza nel caso di dato limite 0 che non sia ne' 0^+ ne' 0^-). Divisione: tabellina del limite della funzione quoziente $f(x)/g(x)$ di due funzioni $f(x), g(x)$ con dati limiti (distinzione dei casi di dati limiti $0^\pm$, finito $\neq 0$, e $\pm\infty$; forme di indecisione $0/0$, ∞/∞, esempi. Limiti di funzioni razionali. Potenza: riduzione del caso generale $f(x)^{g(x)}$ a un caso del tipo $b^{h(x)}$ ($b \in \mathbb{R}$ con $0 < b \neq 1$); tabellina del limite della funzione potenza $b^{h(x)}$ di una funzione $h(x)$ con dato limite (distinzione dei casi di dato limite $-\infty$, finito, e $+\infty$). Esempio (da completare):

$x^{\frac{1}{x}}$. Confronto fra modi di tendere a $+\infty$ (o a $-\infty$, o a 0) per $x \to +\infty$; funzioni fra loro asintotiche. Proposizione: ciascuna funzione esponenziale b^x ($b > 1$) tende a $+\infty$ piu' velocemente di ciascuna funzione potenza x^α ($\alpha > 0$) che a sua volta tende a $+\infty$ piu' velocemente di ciascuna funzione potenza $\log_b(x)$ ($b > 1$). Limiti per $x \to -\infty$. Cosa cambia nelle definizioni. Limiti elementari. Connessione: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$. Esempio: $\lim_{x\to-\infty} xe^x$.

[Algebra Lineare]. Questione: c'e' una controparte "geometrica" dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$, cosi' come $\mathcal{G}^2$ e $\mathcal{G}^3$ lo sono per $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$? Definizione di sistema di generatori di uno spazio vettoriale V. Esempi: in $\mathcal{G}^2$, almeno due vettori, due dei quali non allineati; in $\mathcal{G}^3$, almeno tre vettori, tre dei quali non complanari; in $\mathbb{R}^3$, una sequenza che contenga i tre vettori canonici; in $\mathbb{R}^3$, verifica che i vettori $(1,2,4),(2,5,8)$ non sono un sistema di generatori. Proposizione: aggiungendo qualche vettore ad un sitema di generatori di uno spazio vettoriale V si ottiene ancora un sistema di generatori di V (dimostrazione). Proposizione: nessuna sequenza di meno di n vettori e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ (idea della dimostrazione). Spazio $\langle \mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\rangle$ generato da una sequenza $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ di vettori di uno spazio vettoriale V. Definizione di base di uno spazio vettoriale V. Esempi: in $\mathcal{G}^2$, due vettori non allineati; in $\mathcal{G}^3$, tre vettori non complanari. in $\mathbb{R}^n$, base canonica $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. Proposizione: tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ sono formate da n vettori (dimostrazione). Proposizione: Se $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ e' una base di uno spazio vettoriale V, allora ogni vettore v di V si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$; coordinate di un vettore rispetto ad una base. Proposizione: se uno spazio V ha un sistema di generatori finito, allora da quel sistema di generatori si puo' estrarre una base di V (dimostrazione). Esempio: dato lo spazio $V = \langle \mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_5\rangle$ generato in $\mathbb{R}^4$ dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,0,2,2)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,0,1)$, $\mathbf{v}_4 = (2,1,1,2)$, $\mathbf{v}_5 = (0,1,-1,1)$, estrazione di una base da questo sistema di generatori, e scrittura delle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_i$ rispetto a questa base. Proposizione: Se $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m$ e' una base di uno spazio vettoriale V, allora la funzione

$$\psi : V \to \mathbb{R}^n, \quad \psi : v = \sum_{i=1}^{m} r_i\mathbf{v}_i \mapsto (r_i)_{i=1}^{n}$$

e' una biiezione, coerente con le operazioni (di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori) in V ed $\mathbb{R}^n$.

V settimana;

[Analisi] Risoluzione di esercizi dati la settimana precedente. Intorni di un punto privati del punto. Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a c, $c \in \mathbb{R}$. Esempi: limite di $\sin x/x$ per $x \to 0$; limite di $1/x^2$ per $x \to 0$; limite di x^2 per $x \to c$. Semiintorni di un punto privati del punto. Definizione di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a c^- o c^+. Esempi: limite di $1/x$ per $x \to 0^-$ e per $x \to 0^+$; limite di $2^{1/x}$ per $x \to 0^-$ e per $x \to 0^+$. Relazione fra limite di $f(x)$ per $x \to c$ e limiti di $f(x)$ per $x \to c^-$ e $x \to c^+$.

[Analisi] Limiti delle funzioni potenza, esponenziale, logaritmo, trigonometriche per $x \to c$, $c \in \mathbb{R}$. Altri esempi: limite di $x \sin(\pi/x)$ per $x \to 0$; limite di $[x]$ per $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$; limite di $\delta_0(x)$ per $x \to 0$. Proprieta' dell'operazione di limite rispetto alle operazioni aritmetiche. Teorema dei carabinieri. Relazioni fra le operazioni di limite di una funzione per x che tende ai vari valori limite. Funzione continua in un punto e in un intervallo. Esempi: le funzioni potenza, logaritmo, e trigonometriche sono continue sul loro dominio naturale; la funziione valore assoluto e' continua su $\mathbb{R}$; funzioni continue "definite a pezzi"; esempi di funzioni con vari tipi di discontinuita' in un punto (funzione $\delta_c(x)$ in c; parte intera $[x]$ nei $c \in \mathbb{Z}$; e $\sin(\pi/x)$ in $c = 0$). Buon comportamento della continuita' rispetto alle operazioni aritmetiche ed alla composizione di funzioni. Proposizione: tutte le funzioni elementari sono continue sul loro dominio naturale. Proprieta' delle funzioni continue: teorema dei valori intermedi e teorema degli zeri. Applicazione.

[Analisi] Considerazioni sulle funzioni polinomiali di III grado. Studio di una funzione razionale, e del suo valore assoluto. Limiti notevoli: $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ per $x \to 0$; $\frac{\log(1+x)}{x} \to 1$ per $x \to 0$; $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0$; in altri termini: le funzioni $e^x - 1$, $\log(1+x)$, $\sin x$ sono asintotiche ad x per $x \to 0$; cenni all'interpretazione grafica. Insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dei numeri reali estesi; identificazione di $\mathbb{R}^*$ con una semicirconferenza con estremi inclusi. Comportamento dell'operazione di limite rispetto alla composizione di funzioni; cambiamento di variabili. Discussione dell'enunciato. Applicazione alla determinazione di alcuni limiti ($\frac{2^x-1}{x}$ e $\frac{\log(1+x^2)}{x}$ per $x \to 0$). Per funzioni continue su un intervallo, equivalenza fra iniettivita' e monotonia stretta.

[Algebra Lineare] Nozione di indipendenza lineare, sistema di generatori, base riferita ad un insieme di vettori. Si e' provato che ciascuna $n-$pla di di vettori del tipo $(a_{11}, 0, 0, \ldots, 0)$, $(a_{12}, a_{22}, 0, \ldots, 0)$, ... $(a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots, a_{nn})$, con $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$, e' una base di $\mathbb{R}^n$.

Dal fatto che ogni spazio vettoriale finitamente generato si puo' identificare con uno spazio vettoriale standard e che tutte le basi di uno spazio vettoriale standard hanno la stessa cardinalita' si e' dedotto che tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalita'. Si e' definita la dimensione $\dim V$ di uno spazio vettoriale V come la cardinalita' di una qualsiasi base di V.

Per una matrice M con m righe ed n colonne, si sono definiti lo spazio riga $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ ($\subseteq \mathbb{R}^n$) e lo spazio colonna $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ ($\subseteq \mathbb{R}^m$). Si e' enunciato che l'operazione di sommare ad una riga un multiplo scalare di un'altra riga lascia invariati lo spazio riga della matrice e le relazioni lineari fra le colonne della matrice, e dunque in particolare le dimensioni dello spazio riga e dello spazio colonna. Si e' presentato un metodo, basato su queste proprieta' di invarianza, per determinare la dimensione degli spazi riga e colonna di una matrice. Si e' enunciato che lo spazio riga e lo spazio colonna di una stessa matrice hanno sempre la stessa dimensione. Si e' definito il rango $\varrho(M)$ di una matrice M ponendo $\varrho(M) = \dim(\mathcal{R}(M)) = \dim(\mathcal{C}(M))$. Si sono illustrate queste definizioni e questi enunciati su un esempio.