Il libro di testo del corso e' il seguente, ad esso rimandano i riferimenti nel registro della lezione.

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa; Analisi matematica 1 con elementi di geoemetria e algebra lineare; Zanichelli, 2014

Registro Lezione del 21 settembre 2016.

Si sono sviluppati quattro argomenti:

(1, 2) si sono presentati i primi tratti del linguaggio insiemistico, i primi aspetti della logica elementare, e le relazioni fra di essi (cfr. $\oint$ 1 "Insiemi e logica", pp.1–7, 9–11);

(3) si sono ricordati gli insiemi numerici fondamentali, soffermandosi un poco sui razionali e sui reali (cfr. $\oint$ 1 "Insiemi e logica", pp.5–6);

(4) si sono ricavate alcune identita' algebriche, in particolare su differenze di potenze, e potenze di un binomio (cfr. esposizione qui sotto).

Piu' dettagliatamente:

(1)
- si sono presentate le parole-chiave del linguaggio insiemistico "insieme", "elemento", "appartenenza" ($\in$);
- si e' mostrato come puo' essere presentato un insieme finito per tabulazione;
- si e' definita le relazione $\subseteq$ di inclusione fra insiemi tramite la relazione di appartenenza, ed i termini logici "per ogni" e "implica" ($\forall$ e $\Rightarrow$); si e' esplicitato il significato della non inclusione $\not\subseteq$ tramite la realzione di appartenenza ed i termini logici "esiste" e "tale che" ($\exists$ e :).
- si e' definita la relazione di uguaglianza fra insiemi come una doppia inclusione;
- si e' introdotto l'insieme vuoto ($\emptyset$ o $\{\ \}$);
- si e' definito l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di un insieme A;
- si sono definite le operazioni di intersezione e unione di due insiemi ($\cap$ e $\cup$) e l'operazione di complementazione rispetto ad un insieme ambiente X ($\complement_X$) tramite la relazione di appartenenza ed i termini logici di congiunzione ("e"), disgiunzione ("o") e negazione ("non");
- si e' accennato all'operazione di prodotto cartesiano di insiemi $\times$ tramite la relazione di appartenenza e la nozione di coppia ordinata;
- si sono date le relazioni fra le operazioni sugli insiemi e la cardinalita' (numero degli elmenti) nel caso finito;
- si e' solo accennato all'esistenza di proprieta' delle operazioni sui sottinsiemi di un dato insieme ed alla relativa algebra (algebra di Boole).

(2)
- si sono distinti due tipi di affermazioni contenenrti "variabili": i "predicati" come affermazioni contenenti variabili "libere" e gli "enunciati" come affermazioni contenenti variabili tutte "vincolate", e si e' descritta una forma generale di enunciati, le "implicazioni universali";

- si e′ mostrato su un esempio come si dimostra la verita′ di un enunciato, e come se ne mostra la falsita′ (ruolo del controesempio);
- si e′ mostrato come a predicati si possano associare insiemi e a implicazioni universali corrispondano relazioni di inclusione fra insiemi;

(3)
- si sono ricordati brevemente gli insiemi numerici fondamentali $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; si e′ enunciato il fatto che i numeri razionali sono tutti e soli i numeri decimali con un numero finito di cifre o periodici; si sono definiti i numeri reali come numeri decimali qualsiasi; si e′ mostrato un esempio di numero decimale non periodico, e dunque reale irrazionale.

(4) **Identita′; differenze di potenze; potenze del binomio; progressioni, somme dei primi termini**

Gli insiemi numerici $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ non sono solo insiemi, ma appunto hanno una struttura algebrica (che da′ ai loro elementi lo statuto di ″numeri″). In particolare, in essi sono definite le due operazioni di addizione e moltiplicazione. In ciascuno di questi insiemi queste operazioni godono delle note proprieta′: sono entrambe associative e commutative, la moltiplicazione e′ distributiva verso l′addizione (mentre l′addizione non e′ distributiva verso la moltiplicazione), ed entrambe possiedono un elementro neutro (l′addizione ha lo 0 e la moltiplicazione ha l′1). Inoltre, sia in $\mathbb{Q}$ che in $\mathbb{R}$ si ha che ogni numero a ha un opposto $-a$ ed ogni numero $b \neq 0$ ha un inverso, scritto $1/b$ o b^{-1}.

Queste proprieta′ si usano per sviluppare ed indagare ″espressioni algebriche″ coinvolgenti ″lettere″, e per risolvere problemi, introducendo ″incognite″, impostando ″equazioni″, e manipolandole cercando di ″risolverle″.

In particolare, da queste proprieta′ si ricavano alcune identita′ algebriche valide fra variabili reali. Fra la prime identita′ che si ricavano ci sono quella sulla differenza di quadrati e quella sulla differenza di cubi:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2;$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3;$$

in realta′ valgono identita′ analoghe sulla differenze di potenze quarte, quinte, ..., come mostriamo di seguito.

Osserviamo che le identita′ di sopra hanno come caso particolare le seguenti identita′, ottenute ponendo $a = 1$ e $b = q$:

$$(1-q)(1+q) = 1 - q^2;$$
$$(1-q)(1+q+q^2) = 1 - q^3.$$

D′altro canto, da queste identita′ si possono dedurre le precedenti, ponendo $q = b/a$, sviluppando un poco e liberando dai denominatori. Ora, per ogni numero naturale fissato n, si ha

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n) = \\ 1+q+q^2+\cdots+q^n-q-q^2-q^3-\cdots-q^{n+1} = 1-q^{n+1}.$$

Abbiamo dunque scoperto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale l'identita'

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n) = 1-q^{n+1};$$

questa identita' e' in realta' equivalente alla identita'

$$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n) = a^{n+1}-b^{n+1}.$$

Fra le prime identita' che si ricavano ci sono anche gli sviluppi del quadrato di un binomio e del cubo di un binomio:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

poi si ricava lo sviluppo di ciascuna potenza del binomio

$$(a+b)^n,$$

usando il cosiddetto "triangolo di Tartaglia", come mostriamo di seguito.
Per ciascun numero naturale n, si ha

$$(a+b)^n = c_{n,0}a^n + c_{n,1}a^{n-1}b + c_{n,2}a^{n-2}b^2 + \cdots + c_{n,n}b^n$$

dove i coefficenti $c_{n,k}$ sono certi numeri naturali, che si dicono appunto "coefficienti binomiali". Ad esempio, da $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ si ha: $c_{2,0} = 1, c_{2,1} = 2, c_{2,2} = 1$.
I coefficienti $c_{n,k}$ sono definiti per ogni $n,k \in \mathbb{N}$, con $0 \leq k \leq n$. Posto $c_{n,k} = 0$ per ogni $n,k \in \mathbb{N}$ con $n > k$, questi coefficienti si possono disporre in una matrice infinita, le cui righe e colonne sono indicizzate con i numeri naturali $0, 1, 2, \ldots$ in modo che $c_{n,k}$ compaia all'incrocio fra la riga $n-$ma e la colonna $k-$ma. Usando le informazioni gia' a nostra disposizione possiamo dire che questa matrice e' del tipo

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \ldots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Ci chiediamo se esistono delle relazioni fra i coefficienti binomiali, meglio, se c'e' una regola per dedurre i coefficienti binomiali su una cera riga da quelli sulla riga precedente.

Come fatto in precedenza, possiamo riformulare il discorso nei termini di una sola lettera, definendo i coefficienti binomiali mediante le uguaglianze

$$(1+q)^n = c_{n,0} + c_{n,1}q + c_{n,2}q^2 + \cdots + c_{n,n}q^n.$$

Per ciascun numero naturale $n > 0$, la relazione fra i coefficienti binomiali della riga $n-$ma e i coefficienti binomiali della riga $(n-1)-$ma e' una conseguenza della relazione fra la potenza $n-$ma e la potenza $(n-1)-$ma del binomio:

$$(1+q)^n = (1+q)(1+q)^{n-1}.$$

Scrivendo le potenze del binomio in funzione dei coefficienti binomiali si ha

$$\begin{aligned} c_{n,0} + c_{n,1}q + c_{n,2}q^2 + c_{n,3}q^3 + \cdots + +c_{n,n}q^n = \\ = (1+q)(c_{n-1,0} + c_{n-1,1}q + c_{n-1,2}q^2 + \cdots + c_{n-1,n-1}q^{n-1}) \end{aligned}$$

Sviluppando il secondo membro si ottiene

$$c_{n-1,0} + (c_{n-1,1} + c_{n-1,0})q + (c_{n-1,2} + c_{n-1,1})q^2 + (c_{n-1,3} + c_{n-1,2})q^3 + \cdots + c_{n-1,n-1}q^n.$$

Uguagliando i coefficienti dei monomi ai due membri si ottiene

$$\begin{aligned} & c_{n,0} = c_{n-1,0} \\ & c_{n,1} = c_{n-1,1} + c_{n-1,0} \quad c_{n,2} = c_{n-1,2} + c_{n-1,1} \quad c_{n,3} = c_{n-1,3} + c_{n-1,2} \quad \ldots \\ & c_{n,n} = c_{n-1,n-1} \end{aligned}$$

in breve:

$$\begin{aligned} & c_{n,0} = c_{n-1,0} \\ & c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1} \quad \forall k:\ 0 < k < n \\ & c_{n,n} = c_{n-1,n-1} \end{aligned}$$

Ciascun coefficiente binomiale si ottiene dunque come somma di due che stanno nella riga precedente, quello che sta nella stessa colonna e quello che sta nella colonna precedente. Abbiamo ottenuto cosi che il coefficienti binomiali sono i numeri che compaiono nel triangolo di Tartaglia. In particolare, si ha

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \ldots \\ \vdots \end{array}$$

da cui ad esempio si ha

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Progressioni geometriche; somma dei primi termini. Una successione di numeri reali $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ si dice "progressione geometrica" di termine iniziale a e ragione q se $a_0 = a$ e ciascun altro termine e' ottenuto dal termine precedente moltiplicandolo per q, cioe'

$$a_i = a_{i-1}q, \quad \forall i = 1, 2, \ldots$$

Cosi' esplicitamente, si ha che la successione e' data da

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$$

In particolare, per $a = 1$ si ha la successione

$$1, q, q^2, q^3, \ldots$$

Dalle identita' sulle differenze di potenze si ricava una formula per la somma dei primi termini di questa successione: per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Progressioni aritmetiche; somma dei primi termini. Una successione di numeri reali $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ si dice "progressione aritmetica" di termine iniziale a e ragione q se $a_0 = a$ e ciascun altro termine e' ottenuto dal termine precedente sommandogli q, cioe'

$$a_i = a_{i-1} + q, \quad \forall i = 1, 2, \ldots$$

Cosi' esplicitamente, si ha che la successione e' data da

$$a, a+q, a+2q, a+3q, \ldots$$

In particolare, per $a = 0$ e $q = 1$ si ha la successione dei numeri naturali

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Di seguito ricaviamo una formula per la somma dei primi termini di questa successione, ricaviamo cioe' per ogni $n \in \mathbb{N}$ una formula per

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Consideriamo la tabella che ha nella prima riga i primi n numeri naturali positivi scritti nell'ordine da 1 ad n, e nella seconda riga i primi n numeri naturali positivi scritti nell'ordine da n ad 1

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{array}$$

Sommando per righe gli elementi che compaiono in questa tabella si ha

$$(1+2+3+\cdots+n)+(n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1)=2(1+2+3+\cdots+n).$$

Sommando per colonne gli elementi che compaiono in questa tabella si ha

$$\begin{aligned}&(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\cdots+(n+1)=\\ &\qquad=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)=(n+1)n\end{aligned}$$

Dunque

$$2(1+2+\cdots+n)=(n+1)n,$$

da cui

$$1+2+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Qualche esercizio

1. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

   Per ogni numero naturale n, se la scrittura decimale di n termina con la cifra 1, allora anche la scrittura decimale di n^2 termina con la cifra 1.

   Per ogni numero naturale n, se la scrittura decimale di n^2 termina con la cifra 1, allora anche la scrittura decimale di n termina con la cifra 1.

2. A partire dall'identita'

   $$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^n)=1-q^{n+1},\qquad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{R}$$

   si ricavi l'identita'

   $$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n)=a^{n+1}-b^{n+1},\qquad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

3. Si sviluppi la potenza $(a+b)^6$

   Si sviluppi la potenza $(5a-2b)^3$.

4. Usando lo sviluppo del cubo del binomio, si calcoli $(2,1)^3$.

5. Si ricavi una formula per la somma dei primi termini, dallo 0-mo all'$n-$mo, della progressione geometrica di valore iniziale a e ragione q.

6. Si ricavi una formula per la somma dei primi termini, dallo 0-mo all'$n-$mo, della progressione aritmetica di valore iniziale a e ragione q.