

## **Registro Lezione del 27 settembre 2016.**

*Riferimenti principali, dal Cap. 1 "Numeri":*

§ 3 Campi ordinati.

§ 4 Numeri reali. Estremo superiore e assioma di continuita'.

Si sono sviluppati i seguenti argomenti

(1)  $\mathbb{Q}$  ed  $\mathbb{R}$  come campi ordinati.

In  $\mathbb{Q}$  ed  $\mathbb{R}$  : operazione di somma, operazione di prodotto, relazione d'ordine totale, e loro proprieta'. Ruolo di queste proprieta' come fondamento di procedure di calcolo e di risoluzione di equazioni e disequazioni. Definizione di campo ordinato.

(2) Inadeguatezza di  $\mathbb{Q}$ / adeguatezza di  $\mathbb{R}$ .

Proposizione: l'equazione  $x^2 = 2$  non ha alcuna soluzione in  $\mathbb{Q}$  (con dimostrazione) (cfr. § 1.2 "Un po' di logica elementare", verso la fine). Proposizione: l'equazione  $x^2 = 2$  ha soluzioni in  $\mathbb{R}$  (con descrizione di una procedura per costruire la soluzione positiva). Rappresentazione geometrica dei numeri razionali come punti della retta euclidea. Esistenza di punti della retta che non corrispondono ad alcun numero razionale.

(3) Estremo superiore, definizione assiomatica di  $\mathbb{R}$ .

Per un insieme totalmente ordinato  $X$  (come  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  o la retta euclidea orientata), definizioni di: sottinsieme superiormente o inferiormente limitato, elemento massimo e elemento minimo di un insieme. Esempi di sottinsiemi superiormente limitati che non hanno elemento massimo.

Per un sottinsieme di  $X$ , definizione dei maggioranti e dell'eventuale estremo superiore, definizione dei minoranti e dell'eventuale estremo inferiore. Esempio: l'insieme dei numeri razionali positivi con quadrato minore di 2 non ha estremo superiore in  $\mathbb{Q}$ , ma ha estremo superiore in  $\mathbb{R}$  (ed e'  $\sqrt{2}$ .)

Proprieta' dell'estremo superiore: ogni sottinsieme non vuoto e limitato di  $\mathbb{R}$  ha estremo superiore in  $\mathbb{R}$ . Definizione assiomatica di  $\mathbb{R}$  come campo ordinato con la proprieta' dell'estremo superiore.