Registro Lezione del 28 settembre 2016.

Si sono sviluppati i seguenti due argomenti, il secondo in analogia al primo:

(1) Vettori nel piano.
(1.1) Vettori e segmenti orientati. Operazioni fondamentali sui vettori: vettore somma di due vettori e vettore prodotto di uno scalare per un vettore; proprieta'; combinazioni lineari.
(1.2) Sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, i due vettori fondamentali associati, rappresentazione di punti e vettori con coppie ordinate di scalari, e rappresentazione delle operazioni fondamentali sui vettori come operazioni su coppie ordinate di scalari.
(1.3) Prodotto scalare di due vettori (e' uno scalare), definito mediante richieste geometriche (legate a lunghezza e ortogonalita') e proprieta' rispetto alle operazioni fondamentali. Rappresentazione del prodotto scalare di due vettori come operazione su due coppie ordinate di scalari.
(1.4) Scomposizione di un vettore rispetto ad una data direzione, come somma di una componente parallela ed una componente ortogonale alla direzione; deduzione di una formula esplicita, coefficiente di Fourier di un vettore rispetto ad un vettore non nullo.
(1.5) Deduzione delle equazioni parametriche della retta passante per un dato punto e parallela ad un dato vettore (non nullo); deduzione della equazione cartesiana della retta passante per un dato punto e ortogonale ad un dato vettore (non nullo).

(2) Vettori nello spazio.
(2.1): come (1.1)
(2.2) Sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio, i tre vettori fondamentali associati, rappresentazione di punti e vettori con terne ordinate di scalari, e rappresentazione delle operazioni sui vettori come operazioni su terne ordinate di scalari.
(2.3) Prodotto scalare di due vettori (e' uno scalare), definito mediante richieste geometriche (legate a lunghezza e ortogonalita') e proprieta' rispetto alle operazioni fondamentali. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentazione del prodotto scalare di due vettori come operazione su due terne ordinate di scalari.
(2.4) come (1.4)
(2,5) Deduzione delle equazioni parametriche della retta passante per un dato punto e parallela ad un dato vettore (non nullo); deduzione delle equazioni parametriche del piano passante per un dato punto e parallelo a due dati vettori (non paralleli fra loro); deduzione della equazione cartesiana del piano passante per un dato punto e ortogonale ad un dato vettore (non nullo).

Nel seguito sono riportati in dettaglio gli argomenti che sono stati sviluppati in modo un po' diverso dal testo.

(1.2) Sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano ... (il caso dello spazio e' analogo).

Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O, si sono considerati i due segmenti orientati dall'origine O ai punti unita' del primo e secondo asse, i corrispondenti due vettori si sono detti "vettori fondamentali" del sistema di riferimento, e si sono indicati con **i** e **j**.

Per ogni vettore $\mathbf{v} = \mathbf{v} = \vec{OP}$, si ha che il punto P ha coordinate (x, y) se e solo se il vettore **v** si puo' scrivere come

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j};$$

cosi' come il punto P si identifica con la coppia ordinata (x, y) e si scrive $P(x, y)$ allo stesso modo anche il vettore **v** si identifica con la coppia ordinata (x, y) e si scrive $\mathbf{v} = (x, y)$.

Fatto (implicitamente usato a lezione): se $\mathbf{v} = \vec{PQ}$ con $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ allora si ha

$$\mathbf{v} = (c - a, d - b).$$

Fatto: se $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ e $t \in \mathbb{R}$, allora

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad t\mathbf{u} = (tx_1, ty_1).$$

Infatti, da $\mathbf{u} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$, per le proprieta' delle operazioni fondamentali sui vettori si ha

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j},$$

che significa proprio $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

(1.5) Deduzione dell'equazione parametrica della retta nel piano (quella dell'equazione parametrica della retta nello spazio e' analoga).

Fatto: dato un punto P_0 ed un vettore non nullo **v**, si ha che la retta r per P_0 e parallela a **v** e' data da

$$r = \{P : \vec{P_0P} \parallel \mathbf{v}\} = \{P : (\exists t \in \mathbb{R} : (\vec{P_0P} = t\mathbf{v}))\}.$$

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, se $P_0(x_0, y_0)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, allora la retta r e' l'insieme dei punti $P(x, y)$ tali esiste un $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$(x - x_0, y - y_0) = t(v_1, v_2)$$

cioe'

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

(1.3) Definizione del prodotto scalare nel piano, e deduzione della sua rappresentazione in coordinate (nello spazio la definizione e' la stessa, e la deduzione della sua rappresentazione in coordinate e' analoga).

Fatto: esiste una ed una sola operazione che associa ad ogni due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ uno scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}$ tale che valgano le identita'

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= |\mathbf{u}|^2 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 0 \qquad \text{se } \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \end{aligned}$$

($|\mathbf{u}|$ e' la lunghezza del vettore $\mathbf{u}$, e $\perp$ e' la relazione di ortogonalita' fra vettori) e le identita' di compatibilita' con le operazioni fondamentali sui vettori

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Si e' provata l'unicita' del prodotto scalare e contemporaneamente se ne e' ricavata la rappresentazione in coordinate, nel modo seguente. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nel piano, per i vettori fondamentali del sistema di riferimento si deve avere

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1, \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{j}|^2 = 1, \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$$

e dunque per ogni due vettori $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}) \cdot (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) \\ &= x_1x_2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + x_1y_2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + y_1x_2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + y_1y_2(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) = x_1y_1 + x_2y_2 \end{aligned}$$

(1.4) Scomposizione di un vettore rispetto ad una data direzione, come somma di una componente parallela ed una componente ortogonale alla direzione; deduzione di una formula esplicita, coefficiente di Fourier di un vettore rispetto ad un vettore non nullo.

Fatto: data una direzione, ogni vettore $\mathbf{v}$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come somma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

di un vettore $\mathbf{v}_{\parallel}$ avente direzione uguale alla direzione data e di un vettore $\mathbf{v}_{\perp}$ avente direzione ortogonale alla direzione data. Il vettore $\mathbf{v}_{\parallel}$ si dce "componente vettoriale" del vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla direzione data. Fissato un punto O del piano, la direzione data e' rappresentata da una retta r passante per O, e il vettore $\mathbf{v}$ e' rappresentato da un segmento orientato $\vec{OP}$; allora il vettore $\mathbf{v}_{\parallel}$ e' rappresentato dal segmento orientato $\vec{OP'}$ proiezione ortogonale di $\vec{OP}$ sulla retta r.

Si puo' ricavare una formula per il vettore componente di un vettore $\mathbf{v}$ rispetto ad una direzione data, nel modo seguente. Scelto un vettore $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ avente la direzione data, si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \tag{1}$$

con le condizioni

$$\mathbf{v}_{\parallel} \parallel \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_{\perp} \perp \mathbf{r};$$

queste condizioni si possono riscrivere come

$$\mathbf{v}_{\parallel} = t\mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{r} = 0,$$

dove $t \in \mathbb{R}$ e' uno scalare incognito. Sostituendo $\mathbf{v}_{\parallel} = t\mathbf{r}$ nella (1) si ha

$$\mathbf{v} = t\mathbf{r} + \mathbf{v}_{\perp}$$

e applicando il prodotto scalre con $\mathbf{r}$ ad entrambi i membri

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot (t\mathbf{r} + \mathbf{v}_{\perp})$$

si ha

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}).$$

Questa e' un'equazione di primo grado nell'incognita scalare t, che ha coefficiente $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2 \neq 0$, dunque si ha

$$t = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}},$$

da cui infine si ottiene

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}\, \mathbf{r}.$$

Per ogni due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, lo scalare $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$ si dice "coefficiente di Fourier di $\mathbf{b}$ rispetto ad $\mathbf{a}$."

Applicazione svolta: si e' determinata la componente del vettore $\mathbf{v} = (2,4)$ rispetto alla direzione individuata dal vettore $\mathbf{r} = (2,1)$, prima graficamente e poi applicando la formula.

(2,5) Deduzione delle equazioni parametriche del piano passante per un dato punto e parallelo a due dati vettori (non paralleli fra loro);

Fatto: dato un punto P_0 e due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (non nulli e) non paralleli fra loro, si ha che il piano π per P_0 e parallelo a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e' dato da

$$\begin{aligned}\pi &= \{P : \ \vec{P_0P} \text{ e' combinazione lineare di } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v}\} \\ &= \{P : \ (\exists s,t \in \mathbb{R} : \ (\vec{P_0P} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}))\}.\end{aligned}$$

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, se

$$P_0(x_0, y_0, z_0), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3),$$

allora il piano π e' l'insieme dei punti $P(x, y, z)$ tali che esistono due scalari $s, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

cioe'

$$\begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

Riferimenti, dal cap 8 "'Elementi di geometria e algebra lineare"':

$ 1 *Vettori nel piano e nello spazio.*
Operazioni fondamentali sui vettori: nozioni sui vettori, somma di vettori, moltiplicazione di un vettore per uno scalare, versori, vettori nel piano, vettori nello spazio tridimensionale, combinazioni lineari di vettori.
Prodotto scalare e vettoriale: prodotto scalare (un po' diverso) proiezioni (un po' diverso), rappresentazione del prodotto scalare in coordinate, no prodotto vettoriale nello spazio tridimensionale

$ 2 *Geometria analitica lineare nello spazio:*
Equazione della retta: punto a (il b si puo' ricavare da a) no punto c, no condizioni di parallelismo e ortogonalita' tra rette;
Equazione del piano: solo punto a (il b si puo' ricavare dal a) no punto c, no condizioni di parallelismo e ortogonalita' tra piani, no distanza di un punto da un piano