Registro Lezioni di Algebra Lineare del 12 ottobre 2016.

Definizione di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ come insieme di elementi, detti formalmente "vettori", dotato di una operazione di somma di due vettori e di una operazione di prodotto di un numero reale per un vettore, soddisfacenti proprieta' di compatibilita' (quelle evidenziate nel caso dei vettori del piano e dello spazio e dei vettori $n-$dimensionali reali).

Indipendenza lineare. Configurazioni di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ nel piano o nello spazio: quella di due vettori non allineati e le altre; prima descrizione algebrica delle due alternative: nessuno dei due vettori e' multiplo scalare dell'altro oppure c'e' uno dei due vettori che e' multiplo scalare dell'altro; seconda descrizione algebrica delle due alternative: l'uguaglianza $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}$ vale solo se $\alpha = \beta = 0$, oppure esistono α, β non entrambi nulli tali che $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Configurazioni di tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nello spazio: quella di tre vettori non complanari e le altre; prima descrizione algebrica delle due alternative: nessuno dei tre vettori e' combinazione lineare degli altri due oppure ...; seconda descrizione algebrica delle due alternative: l'uguaglianza $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vale solo se $\alpha = \beta = \gamma = 0$, oppure ...

Definizione (1). Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ vettori di uno spazio vettoriale V (con $m \geq 2$). Se nessun $\mathbf{v}_i$ si puo' ottenere come combinazione lineare degli altri, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di dicono "linearmente indipendenti"; in caso contrario, cioe' se c'e' un $\mathbf{v}_i$ che si puo' ottenere come combinazioone lineare degli altri, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ di dicono "linearmente dipendenti"; un vettore si dice indipendente o dipendente secondo che sia diverso o uguale al vettore nullo.

Esempio: i vettori fondamentali $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti; un poco piu' in generale, $\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q, \ldots, \mathbf{e}_r$ (con $1 \leq p < q < \ldots < r \leq n$) sono linearmente indipendenti.

Esempio: i vettori $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti; infatti: non esiste alcuno scalare α tale che $(1, 2, 3) = \alpha(4, 5, 6)$ e non esiste alcuno scalare β tale che $(4, 5, 6) = \beta(1, 2, 3)$.

Fatto: per due vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ si ha: se uno dei due vettori e' il vettore nullo, allora i due vettori sono linearmente dipendenti; se entrambi i vettori sono diversi dal vettore nullo, allora i due vettori sono linermente dipendenti o indipendenti secondo che i due vettori sono o meno proporzionali.

Definizione (2). Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ vettori di uno spazio vettoriale V. Se l'uguaglianza $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ e' soddisfatta solo per $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ si dicono "linearmente indipendenti"; in caso contrario, cioe' se esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ non tutti nulli tali che $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ si dicono "linearmente dipendenti".

Esempio: ci chiediamo se i vettori $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti (sappiamo gia' che lo sono, ma vogliamo vedere come funziona la seconda definizione). Consideriamo l'equazione fra vettori $3-$dimensionali nelle 2 incognite scalari α, β

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(4, 5, 6) = (0, 0, 0);$$

questa equazione equivale al sistema di 3 equazioni lineari nelle 2 incognite α, β

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \\ 3\alpha + 6\beta = 0 \end{cases} ;$$

questo sistema ha solo la soluzione $\alpha = \beta = 0$. Dunque l'uguaglianza

$$\alpha(1,2,3) + \beta(4,5,6) = (0,0,0),$$

vale solo per $\alpha = \beta = 0$. I tre vettori sono linearmente indipendenti.

Esempio: ci chiediamo se i vettori $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo l'equazione fra vettori $3-$dimensionali nelle 3 incognite scalari α, β, γ

$$\alpha(1,2,3) + \beta(4,5,6) + \gamma(7,8,9) = (0,0,0);$$

questa equazione equivale al sistema di 3 equazioni lineari nelle 3 incognite α, β, γ

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + 8\gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\beta + 9\gamma = 0 \end{cases} ,$$

che a sua volta equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} ;$$

questo sistema ha infinite soluzioni del tipo $\alpha = \gamma$, $\beta = -2\gamma$, $\gamma =$ *qualsiasi* e in particolare ha la soluzione $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 1$. Dunque si ha

$$(1,2,3) - 2(4,5,6) + (7,8,9) = (0,0,0).$$

I tre vettori sono linearmente dipendenti.

Teorema. Le definizioni (1) e (2) sono equivalenti. Si e' dimostrato che m vettori di uno spazio vettoriale V sono linearmente dipendenti nel senso della definizione (1) se e solo se essi sono linearmente dipendenti nel senso della definizione (2); si e' considerato il caso $m \geq 2$ (il caso $m = 1$ e' banale). Nel dettaglio. Da una parte, si e' osservato che se fra i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ c'e' un vettore $\mathbf{v}_i$ che si puo' ottenere come combinazione lineare degli altri

$$\mathbf{v}_i = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j \neq i}} \alpha_j \mathbf{v}_j,$$

allora si ha un'uguaglianza

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \mathbf{v}_j + (-1)\mathbf{v}_i + \sum_{j=i+1}^{m} \alpha_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0},$$

nella quale un almeno un coefficiente, quello di $\mathbf{v}_i$ e' non nullo. Dall'altra parte, si e' ossetvato che se per i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ esistono degli scalari $\beta_1, \ldots, \beta_m$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{j=1,\ldots,n} \beta_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0},$$

allora, indicato con h un indice tale che $\beta_h \neq 0$, da questa uguaglianza si puo' ricavare $\mathbf{v}_h$ come combinazione lineare degli altri

$$\mathbf{v}_h = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j\neq h}} \frac{-\beta_j}{\beta_h} \mathbf{v}_j.$$

In generale, consideriamo m vettori in $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \quad \mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm}).$$

Consideriamo l'equazione fra vettori $n-$dimensionali nelle m incognite scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

$$(e) \qquad \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0};$$

questa equazione equivale al sistema di n equazioni lineari scalari nelle m incognite $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

$$(se) \qquad \left\{ \begin{array}{r} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + a_{nm}\alpha_m = 0 \end{array} \right. .$$

Per la definizione (2), i vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'equazione (e) o equivalentemente il sistema di equazioni (se) ha solo la soluzione banale $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Notazioni sulle matrici. Di regola, denoteremo la generica matrice di m righe ed n colonne, in breve la generica matrice di tipo $m \times n$, con una lettera maiuscola e i suoi elementi con la corrispondente lettera minuscola con due indici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

inoltre, denoteremo le sue righe con la corrispondente lettera miniuscola con un indice e un puntino:

$$\mathbf{a}_{1\bullet} = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}), \quad \mathbf{a}_{2\bullet} = (a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n}), \quad \ldots$$

e denoteremo le sue colonne con la corrispondente lettera miniuscola con un puntino e un indice:

$$\mathbf{a}_{\bullet 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\bullet 2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Le righe e le colonne della matrice si possono identificare rispettivamente con vettori in $\mathbb{R}^n$ e vettori in $\mathbb{R}^m$. Una matrice di tipo $m \times n$ puo′ essere riguardata sia come il vettore colonna dei suoi vettori riga che come il vettore riga dein suoi vettori colonna:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \hline \mathbf{a}_{2\bullet} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m\bullet} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_{\bullet 1} |\, \mathbf{a}_{\bullet 2} |\, \ldots |\, \mathbf{a}_{\bullet n}).$$

Determinanti. Per ogni matrice A quadrata di ordine 2 ad elementi in $\mathbb{R}$, il determinante di A e′ il numero reale $\det(A)$ dato da

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Si ha cosi′ una funzione det dall′insieme delle matrici quadrate di ordine 2 ad $\mathbb{R}$. A volte, per brevita′, scriveremo d al posto di det . Ad esempio:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$$

Nel seguito riguardiamo il determinante di una matrice 2×2 come una funzione delle sue due colonne

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \det(\mathbf{a}|\, \mathbf{b}).$$

Proposizione. Il determinante del secondo ordine possiede le seguenti proprieta′ rispetto alle colonne, ed e′ completamente indiviaduato da queste proprieta′:

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{a}' + \mathbf{a}''|\, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}'|\, \mathbf{b}) + \det(\mathbf{a}''|\, \mathbf{b}); \quad \det(\alpha\mathbf{a}|\, \mathbf{b}) = \alpha \det(\mathbf{a}|\, \mathbf{b}) \\
&\det(\mathbf{a}|\, \mathbf{b}' + \mathbf{b}'') = \det(\mathbf{a}|\, \mathbf{b}') + \det(\mathbf{a}|\, \mathbf{b}''); \quad \det(\mathbf{a}|\, \beta\mathbf{b}) = \beta \det(\mathbf{a}|\, \mathbf{b}) \\
&\det(\mathbf{b}|\, \mathbf{a}) = -\det(\mathbf{a}|\, \mathbf{b}) \\
&\det(\mathbf{a}|\, \mathbf{a}) = 0 \\
&\det(\mathbf{i}|\, \mathbf{j}) = 1
\end{aligned}$$

(per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{b}'' \in \mathbb{R}^2$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{R}^2$ sono i vettori fondamentali).

Le proprieta' di sopra di verificano direttamente, ad esempio la seconda proprieta' della prima riga si prova come segue:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha a_1 & b_1 \\ \alpha a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \alpha a_1 \cdot b_2 - \alpha a_2 \cdot b_1 = \alpha(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Proposizione. Due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^2$ sono linearamente dipendenti se e solo se la corrisopondente matrice ha determinante zero: $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$; in altri termini: due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^2$ sono linearamente indipendenti se e solo se la corrisopondente matrice ha determinante diverso da zero: $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$.

Dimostrazione (parziale). Se $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sono linearmente dipendenti allora ce ne e' uno che e' multiplo scalare dell'altro; supponiamo che $\mathbf{b} = \beta\mathbf{a}$ (l'altro caso e' analogo); si ha $\det(\mathbf{a}|\mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \beta\mathbf{a}) = \beta \det(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \beta 0 = 0$.

Significato geometrico del determnante del secondo ordine. Identifichiamo, mediante un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, l'insieme dei vettori $2-$dimensionali reali $\mathbb{R}^2$ con l'insieme dei vettori del piano, ed identifichiamo i vettori con segmenti orientati uscenti dall'origine. Per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^2$, il determinante $\det(\mathbf{a}|\mathbf{b})$ e' la misura con segno dell'area del parallelogramma identificato da $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ rispetto all'area del quadrato identificato dai vettori foindamentali $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. Il segno e' + o - secondo che la coppia ordinata $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ abbia un orientamento (destrorso o sinistrorso) uguale o opposto all'orientamento (destrorso o sinistrorso) dalla coppia ordinata dei vettori fondamentali $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Fatto. Il determinante di una matrice di tipo 2×2 non cambia se si scambiano le righe con le colonne della matrice:

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb.$$

Dunque, ad ogni proprieta' del determinante rispetto alle colonne corrisponde una proprieta' del determinante rispetto alle righe e viceversa.

Per la definizione del determinante di una matrice quadrata di un qualiasi ordine e per le relative proprieta' si rimanda al testo. Anche nel caso generale, il determinante non cambia se si scabiano le righe con le colonne della matrice, e dunque ad ogni proprieta' del determinante rispetto alle colonne corrisponde una proprieta' del determinante rispetto alle righe e viceversa. Dalle proprieta' del determinante rispetto alle colonne ed alle righe segue la

Proposizione. Per una matrice A quadrata di ordine n le seguenti tre proprieta' sono equivalenti: (1) le n colonne di A sono linearamente dipendenti; (2) le n righe di A sono linearamente dipendenti (3) $\det(A) = 0$. In altri termini. Per una matrice A quadrata di ordine n le seguenti tre proprieta' sono equivalenti: (1) le n colonne di A sono linearamente indipendenti; (2) le n righe di A sono linearamente indipendenti (3) $\det(A) \neq 0$.

Riferimenti dal testo:

Cap. 8 Elementi di geometria e algebra lineare.

1 Vettori nel piano e nello spazio. 1.1 Operazioni fondamentali sui vettori. Definizione di spazio vettoriale astratto. Combinazioni lineari di vettori. Vettori linearmente indipendenti.

4 Matrici e trasformazioni lineari. 4.1 L'algebra delle matrici [solo prima parte su notazioni per le matrici e interpretazione delle righe e delle colonne di una matrice come vettori riga e vettori colonna]. 4.3 Determinante [Esclusi: Teorema di Binet; Prodotto vettoriale e prodotto misto, significato geometrico del determinante]