Registro Lezioni di Analisi del 17 e 19 ottobre 2016.

Riassunto. *A partire dalla definzione di limite di una successione, si sono date le definizioni dei vari tipi di limite per una funzione. Si sono enunciate proposzioni sui limiti delle funzioni elementari. Si e' data la definizione di funzione continua in un punto e su un insieme; si e' enunciato che ciascuna funzione elementare e' continua sul suo dominio di definizione. Si e' ripreso il discorso da un punto di vista unitario dando la definizione di punto di accumulazione per un insieme e la definizione unificata di limite per una funzione. Si sono enunciate le prime proposizioni sui limiti di funzioni (unicita' del limite, limiti di funzioni monotone, relazione fra limite bilatero e limiti sinistro e destro). Questa prima parte e' stata svolta in parallelo alla parte del testo*

Cap.3 Limiti e continuita'. par.2 Limiti di funzioni. Continuita'. Asisntoti. (tranne: asintoto obliquo, nozioni sui punti di discontinuita', definizione topologica di limite.)

ma con un taglio un po' diverso. Per questo viene dato un resoconto piu' dettagliato qui sotto.

Si sono poi enunciate le prime proposizioni sul calcolo dei limiti (teorema sull'algebra dei limiti in $\mathbb{R}$, sua estensione all'algebra parziale dei limiti in $\mathbb{R}^*$, teorema sull'algebra delle funzini continue) e se ne e' mostrato l'uso per il calcolo dei limiti dei polinomi e delle funzioni razionali. Per questa parte si rimanda alle seguenti parti del testo

Cap.3 Limiti e continuita'. par.3 Calcolo dei limiti. (solo: Teorema 3.19, Teorema 3.20, Teorema 3.21, Teorema 3.22; Esempio: Limiti di polinomi; Esempio: Limiti di funzioni razionali).

Limiti; continuita'. Esempi.

Limiti all'infinito Introduzione alla definizione. Consideriamo la successione $\frac{2n+1}{n+1}$ (n intero ≥ 0); si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$; piu' in generale si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2a_n+1}{a_n+1} = 2$$

per ogni successione a_n con $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$; cio' suggerisce di dire che per la funzione $\frac{2x+1}{x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$ con $x \geq -1$) si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2.$$

Definizione di limite per $x \to +\infty$. Sia $f : D \to \mathbb{R}$, ed esista qualche successione di punti di D tendente a $+\infty$. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e' il numero reale esteso $\ell \in \mathbb{R}^*$ se per ogni successione x_n di punti di D tendente a $+\infty$, il limite della successione $f(x_n)$ e' ℓ. In simboli, si pone

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \text{se} \\ &\lim f(x_n) = \ell, \quad (\forall \{x_n\} \subseteq D : \ x_n \to +\infty) \end{aligned}$$

Inoltre, si pone

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell^- \text{ (oppure } \ell^+) \quad \text{se}$$
$$\lim f(x_n) = \ell^- \text{ (oppure } \ell^+), \quad (\forall\{x_n\} \subseteq D:\ x_n \to +\infty)$$

Analogamente di danno le definizioni di limite per $x \to -\infty$.

Proposizione. I limiti delle funzioni elementari per $x \to +\infty$ sono dati da:
$x^\alpha \to +\infty, 1, 0^+$ secondo che $\alpha \in \mathbb{R}$ sia maggiore, uguale, o minore di 0;
$a^x \to +\infty, 1, 0^+$ secondo che $a \in \mathbb{R}^+$ sia maggiore, uguale, o minore di 1;
$\log_a x \to +\infty, -\infty$ secondo che $a \in \mathbb{R}^+$ sia maggiore o minore di 1;
$\sin x, \cos x, \tan x$ non hanno limite;
per $\arcsin x, \arccos x$ non ha senso il limite;
$\arctan x \to \pi/2$.

Proposizione. I limiti delle funzioni elementari per $x \to -\infty$ sono dati da:
$x^m \to +\infty, -\infty, 1, 0^-, 0^+$ secondo che $m \in \mathbb{Z}$ sia maggiore di 0 (pari, dispari), uguale a 0, minore di 0 (dispari, pari);
$a^x \to 0^+, 1, +\infty$ secondo che $a \in \mathbb{R}^+$ sia maggiore, uguale, o minore di 1;
per $\log_a x$ non ha senso il limite;
$\sin x, \cos x, \tan x$ non hanno limite;
per $\arcsin x, \arccos x$ non ha senso il limite;
$\arctan x \to -\pi/2$.

Esempio. Si prova (lo vedremo piu' avanti) che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0;$$

e questo limite non e' ne' uno 0^+ ne' uno 0^-.

Proposizione. Per una funzione $f(x)$ ($x \in D$) esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ se e solo se per la funzione $f(-x)$ ($x \in -D$) esiste $\lim_{x\to-\infty} f(-x)$; inoltre, in caso affermativo, i due limiti coincidono (qui si e' indicato con $-D$ l'insieme che ha per elementi gli opposti degli elmenti di D). In breve:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x).$$

Limiti al finito. Si da' questa definizione per descrivere ed indagare il comportamento di una funzione nelle vicinanze di un punto (la funzione potrebe non essere definita nel punto, e, se e' definita nel punto, il valore della funzione nel punto non interessa).

Definizione di limite per $x \to c \in \mathbb{R}$. Sia $f : D \to \mathbb{R}$, sia $c \in \mathbb{R}$, ed esista in D qualche successione non contenente c e tendente a c. Si dice che il limite di $f(x)$ per

x che tende a c e' il numero reale esteso $\ell \in \mathbb{R}^*$ se per ogni successione $\{x_n\}$ in D non contenente c e tendente a c, il limite della successione $f(x_n)$ e' ℓ. In simboli, si pone

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell \quad \text{se}$$
$$\lim f(x_n) = \ell, \quad (\forall \{x_n\} \subseteq D : \ \{x_n\} \not\ni c \ \text{ e } \ x_n \to c)$$

Inoltre, si pone

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell^- \ (\text{oppure } \ell^+) \quad \text{se}$$
$$\lim f(x_n) = \ell^- \ (\text{oppure } \ell^+), \quad (\forall \{x_n\} : \ x_n \to c, \ D \supset \{x_n\} \not\ni c)$$

Definizione di limite per $x \to c^- \in \mathbb{R}$. Siano $f : D \to \mathbb{R}$, sia $c \in \mathbb{R}$, ed esista in D qualche successione strettamente crescente tendente a c. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c^- e' il numero reale esteso $\ell \in \mathbb{R}^*$ se per ogni successione $\{x_n\}$ in D strettamente crescente tendente a c il limite della successione $f(x_n)$ e' ℓ. In simboli, si pone

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell \quad \text{se}$$
$$\lim f(x_n) = \ell, \quad (\forall \{x_n\} \subseteq D : \ x_n \uparrow c, \ \text{str.})$$

Analogamente si da' la definizione di limite per $x \to c^+$.

Esempi. Si prova che:
per la funzione $\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$, si ha $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$;
per la funzione $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, il limite di $\frac{1}{x}$ per $x \to 0$ non esiste; ma esistono $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$;
per la funzione $\log_2 x$ $(x > 0)$ si ha $\lim_{x\to 0^+} \log_2 x = -\infty$; il limite $\lim_{x\to 0^-} \log_2 x$ non ha senso; per ogni $c < 0$ il limite $\lim_{x\to c} \log_2 x$ non ha senso.
per la funzione $\tan x$ $(x \neq (\pi/2 + k\pi) \ \forall k \in \mathbb{Z})$ si ha $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = +\infty$ e $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \tan x = -\infty$.

Esempio. Si prova (lo vedremo piu' avanti) che

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Esempio. Per la funzione

$$\delta_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \delta_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 2 \\ 0 & \text{per } x \neq 2 \end{cases}$$

si ha

$$\lim_{x\to 2} \delta_2(x) = 0.$$

Funzioni continue.

Definizione. Sia $f : D \to \mathbb{R}$, sia $c \in D$, ed esista in D una successione non contenente c tendente a c. Si dice che f e' continua in c se esiste il limite di $f(x)$ per $x \to c$ ed e' uguale a $f(c)$:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Si dice che f e' continua su un sottinsieme $E \subseteq D$ se f e' continua in ogni punto di E.

Teorema. Ciascuna delle funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, trigonometriche inverse) e' continua sul suo dominio di definizione.

Punti di accumulazione. Definizione generale di limite. Prime proposizioni.

Definizione. Siano $D \subseteq \mathbb{R}$ un sottinsieme di $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^*$ un numero reale esteso.
- Si dice che c e' un punto di accumulazione per D se D contiene una successione di punti diversi da c tendente a c.
- Si dice che c e' un punto di accumulazione superiore per D se D contiene una successione strettamente crescente tendente a c.
- Analogamente si definisce il concetto di punto di accumulazione inferiore per un insieme.

Esempio. Per l'intervallo $(1, +\infty)$ si ha che

• $+\infty$ e' un punto di accumulazione per $(1, +\infty)$; infatti esiste una successione di punti di $(1, +\infty)$ diversi da $+\infty$ e tendente a $+\infty$: ad esempio $a_n = n$ $(n = 2, 3, \ldots)$;

• 1 e' un punto di accumulazione inferiore per $(1, +\infty)$, infatti esiste una successione strettamente decrescente di punti di $(1, +\infty)$ tendente a 1 : ad esempio $a_n = 1 + 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

• ogni $c \in (1, +\infty)$ e' un punto di accumulazione sia inferiore che superiore per $(1, +\infty)$; infatti ...

• non ci sono altri punti di accumulazione per $(1, +\infty)$; infatti se a_n e' una successione di punti di $(1, +\infty)$ che tende a un punto c, allora $a_n > 1$ per ogni n, e cio' implica che $c = \lim a_n \geq 1$.

Esempio. Per l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ si ha che

• $+\infty$ e' un punto di accumulazione per $(1, +\infty)$; infatti ...

• nessun $c \in \mathbb{N}$ e' un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$; infatti per ogni successione a_n di punti di $\mathbb{N}$ diversi da c si ha $|a_n - c| \geq 1$ per ogni n, e dunque non puo' essere $a_n \to c$;

• $9/7$ non e' un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$; infatti per ogni successione a_n di punti di $\mathbb{N}$ si ha $|a_n - c| \geq 2/7$ per ogni n, e dunque non puo' essere $a_n \to c$; in modo analogo si prova che ciascum $c \in \mathbb{R}$ con $c \notin \mathbb{N}$ non e' un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$.

Definizione. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia c un punto di accumulazione di D in $\mathbb{R}^*$. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c e' $\ell \in \mathbb{R}^*$ se per ogni successione $\{x_n\}$ in D

non contenente c e tendente a c, il limite della successione $f(x_n)$ e' ℓ. In simboli, si pone

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to c} f(x) = \ell \quad \text{se} \\ &\lim f(x_n) = \ell, \quad (\forall \{x_n\} \subseteq D: \ \{x_n\} \not\ni c \ \text{ e } \ x_n \to c) \end{aligned}$$

Dalla proposizione di unicita' del limite per le successioni segue la

Proposizione. Il limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a un $c \in \mathbb{R}^*$, se esiste, e' unico.

Dai teoremi sulle successioni monotone segue il

Teorema. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione crescente.
• per ogni punto $c \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione superiore per D, esiste il limite di $f(x)$ per $x \to c^-$, di piu'

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup_{x \in D:\ x < c} f(x);$$

• per ogni punto $c \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione inferiore per D, esiste il limite di $f(x)$ per $x \to c^+$, di piu'

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \inf_{x \in D:\ x > c} f(x).$$

Un teorema analogo vale per le funzioni decrescenti.

Un criterio utile per decidere dell'esistenza di un limite al finito e' dato dalla

Proposizione. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $c \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione sia superiore che inferiore per D. Allora esiste il limite di $f(x)$ per $x \to c$ se e solo se il limite di $f(x)$ per $x \to c^-$ e il limite di $f(x)$ per $x \to c^+$ esistono e sono fra loro uguali; inoltre, in caso affermativo, $\lim_{x \to c} f(x)$ e' uguale al valore comune di $\lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\lim_{x \to c^+} f(x)$.