Registro Lezione di Algebra Lineare del 18 ottobre 2016.

Riassunto. *Si sono considerate le funzioni lineari, cioe' le funzioni fra spazi vettoriali compatibili con le operazioni fondamentali. Si e' provato che le funzioni lineari* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sono eattamente i polinomi di primo grado in n variabili (ammesso per omogeneita' il polinomio nullo), che a loro volta possono essere descritti come prodotto scalare di un vettore costante per un vettore variabile. A partire dal prodotto scalare di una riga per una colonna, si e' definita l'operazione parziale di prodotto di due matrici, e se ne sono enunciate le proprieta' (matrici unita', associativita', non commutativita'). Si sono identificati i vettori n−dimensinali con i vettori colonna, e si e' enunciato che le funzioni lineari* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *possono essere descritte come prodotto di una matrice per un vettore colonna variabile. I riferimenti al testo sono*

Cap.8 Elementi di geometria e algebra lineare.

par.3 Spazi vettoriali; 3.4 Il concetto di linearita' (definizione e primi due esempi).

par.4 Matrici e trasformazioni lineari. 4.1 L'algebra delle matrici (tranne trasposizione) 4.2 Rappresentazione matriciale delle trasformazini lineari (il Teorema di rappresentazione si e' visto caso per le funzioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *).*

Di seguito si riporta un resoconto dettagliato della lezione.

Funzioni lineari. Funzioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e prodotto scalare.

Definizione (funzione lineare fra due spazi vettoriali). Una funzione $f : V_1 \to V_2$ fra due spazi vettoriali V_1 e V_2 si dice "funzione lineare" se e' compatibile con le operazioni fondamentali in V_1 e V_2, cioe' se

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}'),$$
$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}),$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V_1$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$.

Iniziamo considerando le funzioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Esempi.

• La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, e' lineare. Infatti: (1) l'uguaglianza $f(x + x') = f(x) + f(x')$ significa $2(x + x') = 2x + 2x'$, e cio' vale per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$; (2) l'uguaglianza $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ significa $2(\alpha x) = \alpha(2x)$, e cio' vale per ogni $x, \alpha \in \mathbb{R}$

• Ciascuna funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, con a costante, e' lineare. Si prova come sopra.

• La funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$, non e' lineare. Infatti: l'uguaglianza $g(x + x') = g(x) + g(x')$ significa $x + x' + 1 = x + 1 + x' + 1$ e non e' vero che cio' vale per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$, (anzi, non vale per alcun $x, x' \in \mathbb{R}$).

• Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e' del tipo $f(x) = ax$ con a costante. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = f(1)x$$

e basta allora prendere $a = f(1)$.
• Ciascuna funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$, con a_1, a_2 costanti, e' lineare. Infatti: (1) l'uguaglianza

$$f((x_1, x_2) + (x_1', x_2')) = f(x_1, x_2) + f(x_1', x_2')$$

significa

$$a_1(x_1 + x_1') + a_2(x_2 + x_2') = a_1x_1 + a_2x_2 + a_1x_1' + a_2x_2',$$

e cio' vale per ogni $(x_1, x_2), (x_1', x_2'), \in \mathbb{R}^2$; (2) l'uguaglianza

$$f(\alpha(x_1, x_2)) = \alpha f(x_1, x_2)$$

significa

$$a_1(\alpha x_1) + a_2(\alpha x_2) = \alpha(a_1x_1 + a_2x_2),$$

e cio' vale per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
• Ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e' del tipo $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$, con a_1, a_2 costanti, Infatti, per ogni $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f(x_1, x_2) = f(x_1(1, 0) + x_2(0, 1)) = x_1f(1, 0) + x_2f(0, 1) = f(1, 0)x_1 + f(0, 1)x_2$$

e basta prendere $a_1 = f(1, 0)$ e $a_2 = f(0, 1)$.
Proposizione. (1) Ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ del tipo seguente

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \quad \text{cioe'} \\ f((x_i)_1^n) &= \sum_1^n a_ix_i, \quad \text{cioe'} \\ f(\mathbf{x}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

e' lineare ($\cdot$ e' prodotto scalare). (2) Tutte le funzioni lineari $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono di questo tipo. Inoltre, l'$i-$mo coefficiente a_i e'l'immagine tramite f dell'$i-$mo vettore fondamentale $\mathbf{e}_i$ di $\mathbb{R}^n$:

$$a_i = f(\mathbf{e}_i), \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Questa proposizione si prova ragionando come sopra.

Prodotto di matrici. Funzioni lineari $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Per ogni $n-$pla ordinata $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ indichiamo con $(\underline{\mathbf{a}})$ e con $(|\mathbf{a})$ rispettivamente il vettore riga (matrice $1 \times n$) e il vettore colonna (matrice $n \times 1$) aventi le stessa sequenza degli elementi:

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n), \quad (\underline{\mathbf{a}}) = (a_1 \ \ldots \ a_n), \quad (|\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Definizione (prodotto vettore riga per vettore colonna). Definiamo il prodotto di un vettore riga $n-$dimensionale $(\underline{\mathbf{a}})$ per un vettore colonna $n-$dimensionale $(|\mathbf{b})$ (in questo ordine: prima il vettore riga e poi il vettore colonna) come il loro prodotto scalare:

$$(\underline{\mathbf{a}})(|\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

cioe'

$$(a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Non definiamo il prodotto di un vettore riga $n-$dimensionale per un vettore colonna $m-$dimensionale con $n \neq m$.

Definzione (prodotto matrice per matrice). Diciamo che una matrice A e' moltiplicabile per una matrice B se ciascuna riga di A e' moltiplicabile per ciascuna colonna di B, e in tal caso definiamo il prodotto della matrice A per la matrice B come la matrice $AB = C$ il cui elemento c_{ij} di posto (i, j) e' il prodotto della $i-$ma riga di A per la $j-$ma colonna di B. Si ha che una matrice A e' moltiplicabile per una matrice B se e solo se il numero delle colonne di A e' uguale al numero delle righe di B; il prodotto di una matrice $A = (a_{\bullet\bullet})$ di tipo $m \times n$ per una matrice $B = (b_{\bullet\bullet})$ di tipo $n \times p$ e' dato dalla matrice $AB = C = (c_{\bullet\bullet})$ di tipo $m \times p$ data da

$$c_{ij} = \mathbf{a}_{i\bullet} \cdot \mathbf{b}_{\bullet j} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}, \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, p).$$

Esempio. Le seguenti matrici di tipo 4×2 e di tipo 2×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

sono moltiplicabili (nell'ordine); il loro prodotto e' una matrice di tipo 4×3 in cui l'elemento di posto (i, j) e' dato dal prodotto della $i-$ma riga di A per la $j-$ma colonna di B, per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3$; in particolare l'elemento di posto $(3, 2)$ e' dato da

$$(5\ 6) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 40.$$

Per esercizio, si verifichi che

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto BA non e' definito.

Abbiamo cosi' definito un'operazione parziale di prodotto sull'insieme delle matrici ad elementi reali. Le seguenti matrici

$$I_1 = (1),\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

dette matrici unita' di ordine $1, 2, 3, \ldots$, nel loro complesso svolgono il ruolo di elemento neutro per il prodotto, nel senso che per ogni matrice A di tipo $m \times n$ si ha

$$I_m A = A = A I_n.$$

Verifichiamo che per ogni matrice A di tipo 2×3 si ha $I_2 A = A$, lasciando al lettore verificare che per ogni matrice A di tipo 2×3 si ha $AI_3 = A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a + 0d & 1b + 0e & 1c + 0f \\ 0a + 1d & 0b + 1e & 0c + 1f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Il prodotto di matrici e' associativo, nel senso che per ogni tre matrici A, B, C, la matrice $(AB)C$ e' definita se e solo se e' definita la matrice $A(BC)$ e in tal caso si ha $(AB)C = A(BC)$; dunque si potra' scrivere ABC senza ulteriori specificzioni. Per ogni tre matrici A, B, C di tipi rispettivi $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$ la matrice prodotto ABC ha tipo $m \times q$ ed il suo lemento di posto (i, j) e' dato da

$$\sum_{\substack{h=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,p}} a_{ih} b_{hk} c_{kj}, \qquad \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, q.$$

Esempio.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Il prodotto di matrici non e' commutativo. Infatti, date una matrice A di tipo $m \times n$ ed una matrice B di tipo $p \times q$ si ha che esistono enetrabi i prodotti AB e BA solo se $n = p$ e $q = m$; siano dunque A di tipo $m \times n$ e B di tipo $n \times m$; ora, AB ha tipo $m \times m$ e BA ha tipo $n \times n$, dunque puo' essere $AB = BA$ solo se $m = n$; ora, per le matrici quadrate di uno stesso ordine non vale la proprieta' commutativa, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ma}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'identificazione di sequenze ordinate con vettori riga e con vettori colonna permette di trasportare le operazioni fondamentali sull'insieme $\mathbb{R}^n$ ad operazioni sull'insieme $M(1,n)$ dei vettori riga (matrici di tipo $1 \times n$) e sull'insieme $M(n,1)$ dei vettori colonna (matrici di tipo $n \times 1$), e quindi di identificare lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con i risultanti spazi vettoriali $M(1,n)$ e $M(n,1)$.

In particolare, le operazioni su $M(n,1)$ soon definite da

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix},$$

in breve:

$$(|\mathbf{a}) + (|\mathbf{b}) = (|\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad \alpha(|\mathbf{a}) = (|\alpha\mathbf{a}).$$

> Di regola, identificheremo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con lo spazio vettoriale $M(n,1)$ e nelle espressioni matriciali scriveremo in breve $\mathbf{a}$ per intendere il vettore colonna $(|\mathbf{a})$.

L'operazione di prodotto di matrici e' compatibile con le operazini fondamentali sui vettori colonna, nel senso che

$$A(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = A\mathbf{b} + A\mathbf{c}, \quad A(\alpha\mathbf{b}) = \alpha(A\mathbf{b})$$

per ogni matrice A di tipo $m \times n$, ogni due vettori colonna $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ in $M(n,1)$, ed ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$. Infatti:

- l'$i-$ma componente del vettore colonna $A(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ e' data da $\mathbf{a}_{i\bullet} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, l'$i-$ma componente del vettore colonna $A\mathbf{b} + A\mathbf{c}$ e' data da $\mathbf{a}_{i\bullet} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_{i\bullet} \cdot \mathbf{c}$ e le due componenti sono uguali, per le proprieta' del prodotto scalare.
- l'$i-$ma componente del vettore colonna $A(\alpha\mathbf{b})$ e' data da $\mathbf{a}_{i\bullet} \cdot (\alpha\mathbf{b})$, l'$i-$ma componente del vettore colonna $\alpha(A\mathbf{b})$ e' data da $\alpha(\mathbf{a}_{i\bullet} \cdot \mathbf{b})$, e le due componenti sono uguali, per le proprieta' del prodotto scalare.

Proposizione. Per ogni matrice A di tipo $m \times n$ ed ogni vettore $n-$dimensionale $\mathbf{x}$ il prodotto $A\mathbf{x}$ e' un vettore $m-$dimensionale, e la funzione

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

e' lineare. Viceversa, ogni funzione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e' di questo tipo, dove A e' la matrice che ha per colonne le immagini tramite f dei vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$, cioe'

$$\mathbf{a}_{\bullet j} = f(\mathbf{e}_j), \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Il fatto che la funzione $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ sia lineare segue dalla compatibilita' del prodotto di matrici con le operazini fondamentali sui vettori colonna; sul resto torneremo in seguito.

Esempio. Le funzioni lineari $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

dove (a_{ij}) e' una matrice di costanti; esplicitamente,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix}.$$