Alcuni esercizi di algebra lineare:

1. Si stabilisca, usando la definizione, se le seguenti funzioni sono lineari.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1.$$

2. Si calcolino tutti i possibili prodotti fra due delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sono date le matrici

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

   Si calcolino i prodotti BA, AB, BD.

4. Per ciascuna delle seguenti matrici, si scriva la funzione lineare corrispondente (dominio, codominio, legge).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Si costruisca una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $(2, 3, 0)$ e due opportuni vettori fondamentali. Si determinino, usando la la regola di Cramer, le coordinate del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto a tale base. Si verifichi, usando la definizione di coordinate di un vettore rispetto ad una base, la correttezza del risultato trovato.

6. Calcolare il determinante della seguente matrice, riducendola ad una matrice triangolare mediante opportune operazioni sulle righe.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$