Registro Lezione del 19 ottobre 2016.

Si sono sviluppati i seguenti argomenti: definizione di base e dimensione di uno spazio vettoriale; coordinate di un vettore rispetto ad una base; riconoscimento di basi, regola di Cramer per le coordinate; rango di una matrice. Lo svolgimento di questi argomenti e' stato piuttosto diverso da quello del testo, e viene riportato in dettaglio qui di seguito.

Basi e dimensione di uno spazio vettoriale.

Definizione. Una sequenza $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ di vettori di uno spazio vettoriale V si dice "base di V" se

• $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ sono linearmente indipendenti;

• per ogni $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}$ sono linearmente dipendenti.

Esempi

• Nello spazio vettoriale V dei vettori del piano si ha: esiste qualche vettore $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$; $\mathbf{a}_1$ non e' una base di V in quanto esiste in V qualche $\mathbf{a}_2$ tale che $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ siano linearmente indipendenti (basta che $\mathbf{a}_2$ non stia sulla retta di $\mathbf{a}_1$); per ogni altro vettore $\mathbf{a}$ in V, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}$ sono linearmente dipendenti (in quanto $\mathbf{a}$ si puo' scomporre come somma di un vettore sulla retta di $\mathbf{a}_1$ e di un vettore sulla retta di $\mathbf{a}_2$ e quindi come combinazione lineare di $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$); dunque i vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ formano una base di V. In questo modo si ottengono tutte le basi di V. Precisamente: tutte le basi di V sono costituite da due vettori: il primo e' un qualsiasi vettore non nullo e il secondo e' un qualsiasi vettore che non sta sulla retta del primo.

• Nello spazio vettoriale V dei vettori dello spazio si ha che tutte le basi di V sono costituite da tre vettori: il primo e' un qualsiasi vettore non nullo, il secondo e' un qualsiasi vettore che non sta sulla retta del primo e il terzo e' un qualsiasi vettore che non sta sul piano dei primi due.

• Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, la sequenza degli n vettori fondamentali $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ e' una base di $\mathbb{R}^n$: infatti $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono linearmente indipendenti e per ogni vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}$ sono linearmente dipendenti (in quanto si ha $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$, dove le a_i sono le componenti di $\mathbf{a}$).

• Le successioni defintivamente nulle, con l'operazione di somma definita componente per componente e con l'operazione di prodotto per scalari definita componente per componente, formano uno spazio vettoriale, che si indica con $\mathbb{R}^{(\infty)}$. Si prova che non esiste alcuna base (nel senso della definizione di sopra) per questo spazio vettoriale. [1]

Abbiamo visto che nello spazio vettoriale dei vettori del piano tutte le basi sono formate da due vettori e nello spazio vettoriale dei vettori dello spazio tutte le basi sono formate da tre vettori. Questo e' un fatto generale, come specificato dal seguente Teorema (che non dimostriamo).

[1] Infatti comunque siano date m successioni $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ linearmente indipendenti, esiste una suc-

Teorema. Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale (se ce ne sono) sono formate dallo stesso numero di vettori.

Questo Teorema permette di dare la seguente

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale che possegga qualche base. Si dice "dimensione di V" e si indica con $\dim(V)$, il numero di vettori che costituiscono una (e dunque ciascuna) base di V. Se V non possiede alcuna base, si dice che V ha dimensione infinita.

Coordinate.

Una qualsiasi base di uno spazio vettoriale permette di assegnare delle coordinate a ciascun vettore dello spazio, come specificato dal seguente

Teorema. Sia $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $\mathbf{v}$ un qualsiasi vettore di V. Allora $\mathbf{v}$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n;$$

i coefficienti $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ si dicono "coordinate" di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Dimostrazione.
Esistenza della scrittura. Dall'ipotesi segue che $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti, percio' esistono $n+1$ scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ non tutti nulli tali che

$$(1) \qquad \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Non puo' essere $\beta = 0$; altrimenti uno fra gli n scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sarebbe non nullo ed allo stesso tempo $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, cioe' $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Dunque $\beta \neq 0$, e dalla (1) si puo' ricavare $\mathbf{v}$ come combinazione lineare di $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.
Esistenza della scrittura. Comunque date due scritture

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i\mathbf{a}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} z_i\mathbf{a}_i,$$

sottraendo membro a membro si ha

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} (v_i - z_i)\mathbf{a}_i,$$

---

cessione $\mathbf{a}$ tale che $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}$ siano linearmente indipendenti. Precisamente, se

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n_1 1}, 0, 0, \ldots),\\
\mathbf{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n_2 2}, 0, 0, \ldots),\\
&\vdots\\
\mathbf{a}_m &= (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{n_m m}, 0, 0, \ldots),
\end{aligned}$$

indicato con $\overline{n}$ il massimo fra $n_1, n_2, \ldots, n_m$ ed indicata con $\mathbf{a}$ la successione che ha tutte le componenti nulle tranne la $(\overline{n}+1)-$ma, si ha che $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}$ sono linearmente indipendenti.

e cio, per l'ipotesi, implica che per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia $v_i - z_i = 0$, cioe' $v_i = z_i$.

Ciascun spazio vettoriale di dimensione finita n si puo' identificare, fissando una sua base, con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Specificamente, se $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ e' una base di uno spazio vettoriale V, allora la legge

$$\mathbf{v} \mapsto (v_1, \ldots, v_n) \quad \text{se} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$$

definsce una funzione $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ che e' una biiezione ed e' lineare.

Esempio I due vettori $(2, 3)$ e $(4, 5)$ sono linearmente indipendenti, dunque formano una base di $\mathbb{R}^2$; le coordinate del vettore $(6, 7)$ rispetto a questa base sono le soluzioni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$x_1(2, 3) + x_2(4, 5) = (6, 7),$$

che equivale al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$$

Questo sistema si puo' risolvere in vari modi; si trova $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. Questo risultato e' corretto, in quanto

$$(-1)(2, 3) + 2(4, 5) = (6, 7).$$

Riconoscimento di basi.

Teorema. In uno spazio vettoriale V di dimensione n, ogni sequenza di n vettori linearmente indipendenti e' una base di V.

Dimostrazione (leggermente informale). Siano $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vettori linearment indipendenti di V; se ci fosse un vettore $\mathbf{a}$ in V tale che $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}$ fossero linearmente indipendenti, allora si potrebbe proseguire ad aggiungere vettori fino ad ottenere una base di V composta da un numero di vettori $> n$, contro il Teorema di sopra.

In particolare, per n vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ in $\mathbb{R}^n$, le seguenti condizioni sono equivalenti

- $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sono una base di $\mathbb{R}^n$;
- $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sono linearmente indipendenti;
- la matrice quadrata di ordine n avente per colonne $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ ha determinante diverso da zero:

$$\det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}_n) \neq 0$$

Di seguito mostriamo come, data una base di $\mathbb{R}^n$ si possa dare una formula per le coordinate dei vettori di $\mathbb{R}^n$ rispetto a tale base; questa formula, espressa tramite determinanti, e' una generalizzazione della regola di Cramer per la soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite.

Regola di Cramer per le coordinate in $\mathbb{R}^2$.

Di seguito identifichiamo i vettori $2-$ dimensionali con vettori colonna $2-$ dimensionali. Ricaviamo una formula per le coordinate di un vettore $\mathbf{b}$ rispetto ad una data base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ di $\mathbb{R}^2$. Queste coordinate sono le soluzioni x_1, x_2 dell'equazione

$$(*) \qquad x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}.$$

• Applicando ad entrambe i membri dell'equazione $(*)$ la funzione

$$\mathbf{a} \mapsto \det(\mathbf{a}|\ \mathbf{a}_2);$$

otteniamo l'equazione scalare

$$\det(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2|\ \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}|\ \mathbf{a}_2);$$

per le proprieta' del determinante questa equazione si riscrive prima

$$x_1 \det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a}_2) + x_2 \det(\mathbf{a}_2|\ \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}|\ \mathbf{a}_2)$$

e poi

$$x_1 \det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{b}|\ \mathbf{a}_2).$$

Si ha $\det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a}_2) \neq 0$, dunque si ottiene

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}|\ \mathbf{a}_2)}{\det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a}_2)}.$$

• Applicando ad entrambe i membri dell'equazione $(*)$ la funzione

$$\mathbf{a} \mapsto \det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a});$$

otteniamo l'equazione scalare

$$\det(\mathbf{a}_1|\ x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{b});$$

per le proprieta' del determinante questa equazione si riscrive prima

$$x_1 \det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a}_1) + x_2 \det(\mathbf{a}_2|\ \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{b})$$

e poi

$$x_2 \det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{b}).$$

Si ha $\det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a}_2) \neq 0$, dunque si ottiene

$$x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1|\ \mathbf{a}_2)}.$$

Esempio. Con riferimento esempio di sopra. Le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sono date da

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{30-28}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{14-18}{-2} = 2$$

Regola di Cramer per le coordinate in $\mathbb{R}^n$.

Di seguito identifichiamo i vettori $n-$ dimensionali con vettori colonna $n-$ dimensionali. Ricaviamo una formula per le coordinate di un vettore $\mathbf{b}$ rispetto ad una data base $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ di $\mathbb{R}^n$. Queste coordinate sono le soluzioni x_i $(i = 1, \ldots, n)$ dell'equazione

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{b}.$$

Applicando ad entrambe i membri dell'equazione $(*)$ la funzione

$$\mathbf{a} \mapsto \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a} | \ldots | \mathbf{a}_n) \qquad (\mathbf{a} \text{ nella } i\text{−ma colonna })$$

otteniamo l'equazione scalare

$$\det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j | \ldots | \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{b} | \ldots | \mathbf{a}_n);$$

per le proprieta' del determinante questa equazione si riscrive prima

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}_j | \ldots | \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{b} | \ldots | \mathbf{a}_n)$$

e poi

$$x_i \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}_i | \ldots | \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{b} | \ldots | \mathbf{a}_n)$$

Si ha $\det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}_i | \ldots | \mathbf{a}_n) \neq 0$, dunque si ottiene

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{b} | \ldots | \mathbf{a}_n)}{\det(\mathbf{a}_1 | \ldots | \mathbf{a}_i | \ldots | \mathbf{a}_n)}, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Operazioni sulle colonne, sulle righe e calcolo del determinanti.

Proposizione. Le seguenti operazioni su una matrice quadrata ne lasciano invariato il determinante:

(1) modificare una colonna sommandole un multiplo scalare di un'altra colonna.

(2) modificare una riga sommandole un multiplo scalare di un'altra riga.

Proviamo la (1). Consideriamo per semplicita' l'operazione su una matrice A quadrata di ordine n che consiste nel modificare la prima colonna sommandole un multiplo scalare della $j-$ma colonna, con $j \neq 1$. Si ha

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathbf{a}_1 + \alpha\mathbf{a}_j |\, \mathbf{a}_2 |\, \dots |\, \mathbf{a}_n\right) &= \det\left(\mathbf{a}_1 |\, \mathbf{a}_2 |\, \dots |\, \mathbf{a}_n\right) + \alpha \det\left(\mathbf{a}_j |\, \mathbf{a}_2 |\, \dots |\, \mathbf{a}_n\right) \\
&= \det\left(\mathbf{a}_1 |\, \mathbf{a}_2 |\, \dots |\, \mathbf{a}_n\right) + \alpha \cdot 0 \\
&= \det\left(\mathbf{a}_1 |\, \mathbf{a}_2 |\, \dots |\, \mathbf{a}_n\right)
\end{aligned}$$

Usando queste operazioni, ed eventualmente le operazioni di scambio di due colonne, o di due righe, si puo' sempre trasformare una matrice in una matrice triangolare, e dunque ricondurre il calcolo del determinante di una matrice al calcolo del determinate di una matrice triangolare.

Esempio. Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Sommando alla seconda riga (-2) volte la prima riga e sommando alla terza riga (-4) volte la prima riga si ha

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 12 \end{pmatrix} = (*)$$

e sommando alla terza riga (-5) volte la seconda riga si ha

$$(*) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Rango di una matrice

Un sottinsieme di vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ di un dato insieme finito $\mathcal{I}$ di vettori di uno spazio vettoriale V si dice "sottinsieme fondamentale" dell'insieme $\mathcal{I}$ se: (1) i vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ sono linearmente indipendenti; (2) oer ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{I}$, i vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}$ sono linearmente dipendenti. Si prova che

> Teorema. Tutti i sottinsiemi fondamentali di uno stesso insieme finito $\mathcal{I}$ sono costituiti dallo stesso numero di vettori; questo numero si dice "rango" dell'insieme $\mathcal{I}$.

Una sottomatrice di tipo $p \times q$ di una matrice A di tipo $m \times n$ e' la matrice degli elementi di A comuni a p righe e q colonne di A, oppure, in altri termini, e' una matrice ottenuta da A cancellando $m - p$ righe ed $n - q$ colonne. Ad esempio, per la matrice di tipo 3×4

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

alcune sottomatrici di tipo 2×2 sono

$$\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g & h \\ k & l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & c \\ i & k \end{pmatrix}.$$

Una sottomatrice M quadrata di ordine p una data matrice A si dice "sottomatrice fondamentale" della matrice A se $\det M \neq 0$ e per ciascuna delle sottomatrici P quadrate di ordine $p + 1$ della matrice A che contengono M si ha $\det P = 0$. Si prova che

> Teorema (Kronecker). Tutti le sottomatrici fondamentali di una stessa matrice sono dello stesso ordine.
>
> L'ordine di una sottomatrice fondamentale di una matrice A si dice "rango" della matrice A e si indica con $\rho(A)$.

Si prova infine il

> Teorema. Per ogni matrice A, il rango dell'insieme delle righe di A e il rango dell'insieme delle colonne di A sono uguali al rango $\rho(A)$ della matrice A.

Esempio. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Le prime due righe sono un sottinsieme fondamentale dell'insieme delle righe di A (infatti sono linearmente indipendenti, mentre le tre righe sono linearmente dipendenti, in quanto la loro somma e' la riga nulla). Dunque $\rho(A) = 2$. Per il teorema precedente, 2 sara' anche il numero di un qualsiasi sottinsieme fondamentale dell'insieme delle colonne di A, e 2 sara' anche l'ordine di una qualsiasi sottomatrice fondamentale di A.

Riferimenti al testo

Cap.8 Elementi di geometria e algebra lineare.

Par.3 Spazi vettoriali. 3.1 Vettori $n-$dimensionali, lo spazio $\mathbb{R}^n$, spazi vettoriali astratti (parte su base e dimensione, con l'avvertenza che le definizioni di base date a lezione e sul testo sono diverse -anche se comunque equivalenti dal punto di vista logico).

Par.4 Matrici e trasformarzioni lineari. 4.3 Determinante (solo Teorema 8.6 (punto e) ed Esempio 4.8); 4.4 Caratteristica di una matrice (il discorsi sviluppati a lezione e sul testo, cioe' i concetti dati, e le relazioni fra di essi evidenziate, sono diversi -anche se comunque correlati).